

Révisions d'analyse

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 23.1 (★★ - Prolongement \mathcal{C}^1)
 Soit f la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0, \pi/2]$.
 2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi/2]$ et calculer sa dérivée.
 3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.
 4. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$ et préciser $f'(0)$.
-

Exercice 23.2 (★ - Inégalités de convexité)

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a : $1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.
 2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], 1 - t \leq 1 - t^n \leq n(1 - t)$.
 3. Montrer que pour tout $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et pour tout $x, y > 0$: $x^{1/p}y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$.
 4. Montrer que pour tout $x_1, \dots, x_n > 0$, on a : $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.
-

Exercice 23.3 (★ - Bijection réciproque de la fonction sinus)

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle I à préciser.
 2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $] - 1, 1[$, et que $\forall x \in] - 1, 1[, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
-

Exercice 23.4 (★★)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$ et admettant n racines distinctes. Montrer que P' admet $n - 1$ racines réelles.

Exercice 23.5 (★★★)

Considérons le polynôme $P(X) = (X^2 - 1)^n$. Montrer que sa dérivée n -ème possède exactement n racines distinctes toutes dans $] - 1, 1[$.

Exercice 23.6 (★ - Inégalité des accroissements finis)

1. Montrer que pour tout $x, y \in [1, +\infty[$, on a $|\ln(x) - \ln(y)| \leq |x - y|$.
 2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
-

Exercice 23.7 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f la fonction définie par $f(x) = x^{n-1} \ln(x)$. Calculer la dérivée n -ième de f .

Exercice 23.8 (★★★★ - ESCP 2014)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f' est à valeurs dans \mathbb{R}_- .
3. (a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.
(b) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
(c) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.
(b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.
5. Montrer que pour tout réel positif t , on a : $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.

Formules de Taylor, développements limités**Exercice 23.9 (★)**

Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+x} ; \quad \left| \quad f_2 : x \mapsto e^x \sqrt{1-x} ; \quad \left| \quad f_3 : x \mapsto \sin(x) \cos(x).$$

Exercice 23.10 (★★)

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2} ; & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{1/2} - x - \cos(x)}{x^3} ; \\ 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} ; & 4. \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \left(\sqrt[n]{e} - \frac{n+1}{n}\right). \end{array}$$

Exercice 23.11 (★)

Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 23.12 (★★)

1. Soit Φ la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $\Phi(t) = \ln(1+t)$. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $t > -1$,

$$\Phi^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+t)^k}.$$

2. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \ln(1+t) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} t^k \right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

3. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge et donner la valeur de sa somme.

Suites

Exercice 23.13 (★★ - Une suite implicite)

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette racine.
 2. Calculer x_2 .
 3. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0, 1]$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
 4. Déterminer la monotonie de la suite (x_n) et montrer sa convergence.
 5. Justifier que $\forall n \geq 2, 0 \leq x_n \leq \frac{2}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
 6. Déterminer la limite de x_n^n , puis montrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$.
-

Exercice 23.14 (★★ - Étude d'une suite récurrente)

Soit $a \geq 0$, et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases} .$$

1. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, comparer $\ln(1+x)$ et x .
 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et à termes positifs.
 3. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
 4. Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
-

Exercice 23.15 (★★ - Une autre suite récurrente)

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \exp(-x - 1)$.
 - (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, et que $0 \leq \alpha \leq 1$.
 - (b) Tracer le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ à l'aide de **Scilab**, et déterminer graphiquement une valeur approchée de α .
 - (c) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|f(x) - f(y)| \leq e^{-1}|x - y|$.
 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq e^{-1}|u_n - \alpha|$.
En déduire que $|u_n - \alpha| \leq e^{-n}|u_0 - \alpha|$.
 - (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
 - (c) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function alpha = approx(eps)` qui, pour $\varepsilon > 0$, renvoie une approximation de α à ε près.
-

Séries

Exercice 23.16 (★)

Nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{l}
 1. \sum \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
 2. \sum ne^{-n}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3. \sum \frac{n^2 + 1}{3n + n^3} \\
 4. \sum \frac{\ln(n)}{n^2}
 \end{array} \right|
 \begin{array}{l}
 5. \sum \frac{\sin(n)}{2n^2} \\
 6. \sum \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)
 \end{array}$$

Exercice 23.17 (★)

Nature et calcul des séries suivantes :

$$\begin{array}{l}
 1. \sum_{n \geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!} \\
 2. \sum_{n \geq 0} n \frac{4^n}{3^{2n+1}} \\
 3. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n} \\
 4. \sum_{n \geq 0} \frac{n}{(n+1)!}
 \end{array}$$

Exercice 23.18 (★★)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

2. On définit deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 23.19 (★★ - Suites de Fibonacci)

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite déterminée par $F_0 = F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- Écrire un programme qui demande n à l'utilisateur, et qui renvoie la valeur de F_n .
 - Montrer qu'il existe des réels a, b, r_1, r_2 , que l'on déterminera, vérifiant $r_2 = -\frac{1}{r_1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = ar_1^n + br_2^n$.
 - Donner un équivalent de F_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 - En déduire que la série de terme général $\frac{F_n}{2^n}$ converge, et calculer sa somme.
-

Exercice 23.20 (★★)

1. (a) Montrer que : $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.

(b) En déduire que : $\left| \arctan x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

(c) En déduire une CNS de convergence de la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.

2. (a) Montrer que $\left| \pi - 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{4}{2n+3}$.

(b) Écrire une fonction `pi=approx(epsilon)` qui prend en entrée un réel $\epsilon > 0$ et renvoie une valeur approchée de π à ϵ près.

Exercice 23.21 (★★ - Étude d'une série alternée)

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

2. Considérons la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

(a) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \geq 2}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 2}$ convergent vers la même limite.

(b) En déduire que la série de terme général $(-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ converge.

3. Soit $v_n = n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1$.

(a) Montrer à l'aide d'un développement limité que $v_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

(b) En déduire que la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 23.22 (★★★ - Formule de Stirling (Extrait de EML 2012))

On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ converge.

2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

3. En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.

4. Justifier que $n! \sim \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Exercice 23.23 (★★★ - QSP ESCP 2008)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.

Intégrales

Exercice 23.24 (★)

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{8k^3 + n^3} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 23.25 (★★ - Intégrales de Wallis (Extrait Edhec 2013))

Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.

2. (a) Calculer u_0 et u_1 .

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

- (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.
- (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.
- (d) En déduire la valeur de u_{2n+1} .
4. (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.
- (b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n) , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
- (c) Montrer enfin que l'on a $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 23.26 (★★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt$; | 3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x + \ln(x)} dx$; | 5. $\int_0^1 \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$; |
| 2. $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$; | 4. $\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$; | 6. $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} du$. |

Exercice 23.27 (★)

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \geq 1, u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2 + n} dt$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geq 1, |u_n| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + n}$.
2. En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Exercice 23.28 (★★)

1. (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$.
- (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$: $\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$.
- (c) En déduire que : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. En procédant de même, déterminer un équivalent simple quand n croît vers l'infini de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Exercice 23.29 (★★ - Extrait de EML 2004)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ convergent.
2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$
3. En déduire que la fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 23.30 (★★ - Extrait de EML 2006)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

3. Montrer que

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}$$

4. En utilisant le changement de variables $x = \sqrt{t}$, déterminer la valeur de $\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 23.31 (★★★ - Calcul de l'intégrale de Gauss)

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente. On note A sa valeur.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

(a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall h \in [-1, 1], \forall t \in [0, 1], |e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)| \leq Mh^2.$$

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in [-1, 1]$ non nul, on a :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \right| \leq M|h|f(x).$$

(c) Montrer alors que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On pose $g(x) = f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$. Montrer que g est constante sur \mathbb{R} .

4. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5. En déduire la valeur de A .

Fonctions de plusieurs variables**Exercice 23.32 (★★)**

Soit U l'ouvert de \mathbb{R}^2 défini par $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$, et soit f la fonction définie sur U par :

$$f(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 2 \ln(x-y).$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur U .

2. Calculer les dérivées partielles de f , et en déduire que f admet un unique point critique a que l'on déterminera.

3. Déterminer la matrice hessienne de f en tout point $(x, y) \in U$.

Montrer que 2 est valeur propre, et déterminer son autre valeur propre.

En déduire la nature local de a .

4. On souhaite désormais prouver que f possède un minimum global en a . Soit $x \in U$, $h = x - a$ et soit $g_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_x(t) = f(a + th)$.
- (a) Exprimer $g_x(0)$ et $g_x(1)$ en fonction de $f(a)$ et $f(x)$.
 - (b) Montrer que g_x est une fonction convexe sur $[0, 1]$.
 - (c) Déterminer une équation de la tangente à g_x en $t = 0$. Conclure.
-

Exercice 23.33 (★★)

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$ et soit f la fonction définie sur \mathcal{D} par $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$.

1. Montrer que f possède sur \mathcal{D} un minimum m et un maximum M .
 2. Soit Ω l'ouvert de \mathbb{R}^2 défini par $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 4\}$. Déterminer les points critiques de f et déterminer les valeurs de f en ces points critiques.
 3. Déterminer les points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4$.
 4. En déduire les valeurs de m et M .
-