TD23

# Révisions d'analyse

## Fonctions d'une variable réelle

### Exercice 23.1 (★★ - Prolongement $\mathscr{C}^1$)

Soit $f$ la fonction définie sur $[0,\pi/2]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $f$ est continue sur $[0,\pi/2]$.
2. Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.
4. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ et préciser $f'(0)$.

---

### Exercice 23.2 (★ - Inégalités de convexité)

1. Montrer que pour tout $x \in [0,\pi/2]$, on a : $1 - \dfrac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $1-t \leq 1-t^n \leq n(1-t)$.
3. Montrer que pour tout $p,q>0$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ et pour tout $x,y>0$ : $x^{1/p}y^{1/q} \leq \dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}$.

---

### Exercice 23.3 (★ - Bijection réciproque de la fonction sinus)

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle $I$ à préciser.
2. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $]-1,1[$, et que $\forall x \in ]-1,1[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

---

### Exercice 23.4 (★★)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$ et admettant $n$ racines distinctes. Montrer que $P'$ admet $n-1$ racines réelles.

---

### Exercice 23.5 (★★★)

Considérons le polynôme $P(X) = (X^2-1)^n$. Montrer que sa dérivée $n$-ème possède exactement $n$ racines distinctes toutes dans $]-1,1[$.

---

### Exercice 23.6 (★ - Inégalité des accroissements finis)

1. Montrer que pour tout $x,y \in [1,+\infty[$, on a $|\ln(x)-\ln(y)| \leq |x-y|$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

---

### Exercice 23.7 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Calculer la dérivée $n$-ième de $f$.

---

### Exercice 23.8 (★★★★ - ESCP 2014)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et $\alpha$ un réel strictement positif. On suppose que $f$ est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que $f$ est convexe.
2. Montrer que $f'$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.
3. (a) Montrer que $f$ admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) Montrer que $f$ tend vers 0 en $+\infty$.
   (c) Montrer que $f'$ tend vers 0 en $+\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.
   (b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.
5. Montrer que pour tout réel positif $t$, on a : $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.

---

## Formules de Taylor, développements limités

### Exercice 23.9 (★)
Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$ ;
2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$ ;
3. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

---

### Exercice 23.10 (★★)
Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ ;
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ ;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/2} - x - \cos(x)}{x^3}$ ;
4. $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt[n]{e} - \frac{n+1}{n}\right)$.

---

### Exercice 23.11 (★)
Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x.$$

---

### Exercice 23.12 (★★)

1. Soit $\Phi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Phi(x) = \ln(x)$. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $x > 0$,
$$\Phi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}.$$
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left| \ln(1+t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} t^k \right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$
3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et donner sa somme.
4. Écrire un programme `Scilab` qui demande à l'utilisateur un réel $\varepsilon > 0$ et qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ à $\pm\varepsilon$ près.

---

# Suites

### Exercice 23.13 (★★ - Edhec 2017)

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction $f_n$ définie par :
$$\forall x \in [0,1] \ , \ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. (a) Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)`, où $x$ et $n$ sont donnés par l'utilisateur.

```
function y = f(x,n)
      y = sum(------)
endfunction
```

   (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f`, en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée `f`.

```
function y = f(x,n)
      if x==1 then y = ------
              else y = ------
      end
endfunction
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ , d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution $\alpha_n$ dans $[0,1]$.
3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. (a) Déterminer $\alpha_2$ puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 < 1$.
   (b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

5. On suppose que $f_n$ a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n=input('entrer la valeur de n : ')
x=0
while f(x,n)<1
      x=x+0.001
end
disp(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et $\alpha_n$ ?

---

**Exercice 23.14 (★★ - Étude d'une suite récurrente)**
Soit $a \geq 0$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$.

1. Pour tout $x \in ]-1,+\infty[$, comparer $\ln(1+x)$ et $x$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et à termes positifs.
3. Montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

---

**Exercice 23.15 (★★★ - QSP ESCP 2017)**
On considère deux suites réelles $u$ et $v$ définies par leurs premiers termes $u_0$ et $v_0$ strictement positifs et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_n}{u_{n+1}}(u_{n+1} - u_n)$.
2. Montrer que les suites $u$ et $v$ divergent vers $+\infty$.

---

# Séries

**Exercice 23.16 (★)**
Nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum ne^{-n}$
3. $\sum \frac{n^2+1}{3n+n^3}$
4. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$
5. $\sum \frac{\sin(n)}{2n^2}$
6. $\sum \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$

---

### Exercice 23.17 (★)

Nature et calcul des séries suivantes :

1. $\sum \frac{3^{2n+1}}{n!}$
2. $\sum n \frac{4^n}{3^{2n+1}}$
3. $\sum \frac{n^2}{3^n}$
4. $\sum \frac{n}{(n+1)!}$

---

### Exercice 23.18 (★★)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

2. On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

   Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

---

### Exercice 23.19 (★★ - Suites de Fibonacci)

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite déterminer par $F_0 = F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Écrire un programme qui demande $n$ à l'utilisateur, et qui renvoie la valeur de $F_n$.

2. Montrer qu'il existe des réels $a, b, r_1, r_2$, que l'on déterminera, vérifiant $r_2 = -\frac{1}{r_1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = ar_1^n + br_2^n$.

3. Donner un équivalent de $F_n$ lorsque $n \to +\infty$.

4. En déduire que la série de terme général $\frac{F_n}{2^n}$ converge, et calculer sa somme.

---

### Exercice 23.20 (★★)

1. (a) Montrer que: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.

   (b) En déduire que : $\left| \arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

   (c) En déduire une CNS de convergence de la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.

2. Montrer que $\left| \pi - 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{4}{2n+3}$.

   Écrire une fonction `pi=approx(epsilon)` qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une valeur approchée de $\pi$ à $\varepsilon$ près.

---

### Exercice 23.21 (★★ - Étude d'une série alternée)

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

2. Considérons la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

(a) Montrer que les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers la même limite.

(b) En déduire que la série de terme général $(-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k}$ converge.

3. Soit $v_n = n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1$.

(a) Montrer à l'aide d'un développement limité que $v_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \dfrac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

(b) En déduire que la série $\sum v_n$ converge.

---

**Exercice 23.22 (★★★ - Formule de Stirling (Extrait de EML 2012))**
On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} a_n$ converge.
2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
3. En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite $\ell$ est strictement positive.
4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

---

**Exercice 23.23 (★★★ - QSP ESCP 2008)**
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$.

---

# Intégrales

**Exercice 23.24 (★)**
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3 + n^3}.$$

---

**Exercice 23.25 (★★ - Intégrales de Wallis (Extrait Edhec 2013))**
Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.
2. (a) Calculer $u_0$ et $u_1$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
   (c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

3. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   (d) En déduire la valeur de $u_{2n+1}$.
4. (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.
   (b) En déduire, en utilisant les variations de $(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
   (c) Montrer enfin que l'on a $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

---

**Exercice 23.26 (★)**
Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ ;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ ;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+\ln(x)}\mathrm{d}x$ ;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ ;
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$, $(a, b > 0)$ ;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u$.

---

**Exercice 23.27 (★)**
Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\forall n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+n}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(u_n)$ est bien définie et que pour tout $n \geq 1$, $|u_n| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+n}$.
2. En déduire que $(u_n)$ converge, et déterminer sa limite.

---

**Exercice 23.28 (★★ - Extrait de EML 2004)**

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.
2. Montrer que pour tout $x \in ]0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t$ converge et on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u.$$
3. En déduire que la fonction $f : x \in ]0, +\infty[ \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$ est dérivable et calculer sa dérivée.

---

**Exercice 23.29 (★★ - Extrait de EML 2006)**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

3. Montrer que
$$I_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} \text{ si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}$$

4. En utilisant le changement de variables $x = \sqrt{t}$, déterminer la valeur de $\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

---

### Exercice 23.30 (★★ - Edhec 2003)

Soit $p$ un entier naturel et $f$ une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p, +\infty[$ et telle que $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $p$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} f(k)$.

1. (a) Utiliser la décroissance de $f$ pour montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal $p$, on a : $S_n - f(p) \leq \displaystyle\int_p^n f(t)\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $p$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $p$, on a :
$$\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour que :
   $R_n \underset{+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

3. Dans cette question, pour tout réel $x$ de $[2, +\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.
   (a) Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2.(b).
   (b) En déduire un équivalent, lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$ , de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$
   (c) La série de terme général $R_n$ est-elle convergente ?

---

### Exercice 23.31 (★★ - Ecricome 2012)

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x + e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale $I_a$ converge et donner sa valeur.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$, puis que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Établir que : $0 < f(x) - f(y) \leq \dfrac{y-x}{2}$.

4. Montrer que $f$ est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On notera $\alpha$ cette solution. Justifier que $\alpha \in ]0, 1]$.

6. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (b) On suppose qu'une fonction `Ecricome` est déjà écrite en `Scilab`, qui à un réel $x$ donné renvoie le réel $f(x)$.
   À l'aide de la fonction `Ecricome`, écrire une fonction `suite` en `Scilab` qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier $N$ tel que $\dfrac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ et renvoie la valeur de $u_N$ correspondante.

7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :
$$|f(x+h) - f(x) - g(x)h| \leq \frac{h^2}{3}.$$
   Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction $T$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(x) = xf(x)$.
   Justifier que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad \text{puis que :} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

---

### Exercice 23.32 (★★★ - Calcul de l'intégrale de Gauss)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ est convergente. On note $A$ sa valeur.

2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

(a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall h \in [-1,1],\ \forall t \in [0,1],\ |e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)| \leq Mh^2.$$

(b) En déduire que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

3. On pose $g(x) = f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$. Montrer que $g$ est constante sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}$, et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5. En déduire la valeur de $A$.

---

# Fonctions de plusieurs variables

### Exercice 23.33 (★★)

Soit $U$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$, et soit $f$ la fonction définie sur $U$ par :

$$f(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 2\ln(x-y).$$

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$.

2. Calculer les dérivées partielles de $f$, et en déduire que $f$ admet un unique point critique $a$ que l'on déterminera.

3. Déterminer la matrice hessienne de $f$ en tout point $(x,y) \in U$.

   Montrer que 2 est valeur propre, et déterminer son autre valeur propre.

   En déduire la nature local de $a$.

4. On souhaite désormais prouver que $f$ possède un minimum global en $a$. Soit $x \in U$, $h = x - a$ et soit $g_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_x(t) = f(a + th)$.

   (a) Exprimer $g_x(0)$ et $g_x(1)$ en fonction de $f(a)$ et $f(x)$.

   (b) Montrer que $g_x$ est une fonction convexe sur $[0,1]$.

   (c) Déterminer une équation de la tangente à $g_x$ en $t = 0$. Conclure.

---

### Exercice 23.34 (★★)

Soit $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ et soit $f$ la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$.

1. Montrer que $f$ possède sur $\mathscr{D}$ un minimum $m$ et un maximum $M$.

2. Soit $\Omega$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 4\}$. Déterminer les points critiques de $f$ et déterminer les valeurs de $f$ en ces points critiques.

3. Déterminer les points critiques de $f$ sous la contrainte $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 4$.

4. En déduire les valeurs de $m$ et $M$.

**Exercice 23.35 (★★★★ - Oral ESCP 2015)**
Soit $n \geq 2$. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls. On considère les ensembles suivants :

$$\mathscr{E} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}$$

ainsi que :

$$\mathscr{S} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \right\}$$

et

$$\mathscr{E}_0 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} < 1 \right\}.$$

1. (a) Montrer que $\mathscr{E}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que : $\forall x, y \in \mathscr{E}, \dfrac{x+y}{2} \in \mathscr{E}$.
   (b) Montrer que $\mathscr{E}_0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que $S$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \notin \mathscr{E}$. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathscr{E}$ par :

$$f(z) = \|z - x\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Montrer que $\inf\limits_{z \in \mathscr{E}} f(z)$ existe et est atteint en un (ou plusieurs) point(s) de $\mathscr{E}$.
   (b) Soit $z_0$ un point où $f$ atteint son minimum sur $\mathscr{E}$. En calculant le gradient de $f$, montrer que $z_0$ appartient à $S$.
   (c) Montrer que $\inf\limits_{z \in \mathscr{E}} f(z)$ est atteint en un seul point. On le note $x^*$.
3. (a) Montrer que le point $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ est défini par : il existe $\lambda$ réel tel que pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$,
   $$x_i^* = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda} \qquad (*)$$
   (b) Montrer que l'on peut supposer $\lambda > 0$.
   (c) En étudiant la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
   $$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + t)^2} - 1,$$
   montrer qu'il existe un unique $\lambda$ vérifiant $(*)$.
4. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = 1$. Déterminer le point $x^*$ ainsi que $f(x^*)$.