TD24

Révisions d'algèbre

Polynômes

Exercice 24.1 (★★ - Division euclidienne)

Dans les cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de A par B.

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$.
2. $A = X^n - 4X + 1$, $B = (X-1)^2$.

Exercice 24.2 (★★ - Équations polynomiales)

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X^2) = 4P(X)$.
2. Déterminer tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$

1. Tout d'abord, notons que $P = 0$ satisfait bien l'équation, et que c'est le seul polynôme constant solution de cette équation.

   Si $\deg(P) = 1$, alors $\deg(P') = 0$ et $\deg(P'(X^2)) = 0 \neq \deg(4P)$, donc P n'est pas solution de l'équation.

   Supposons à présent que $\deg(P) = n \geq 2$, et que P est solution de l'équation. On a :

   $$P'(X^2) = 4P(X) \quad \Rightarrow \quad \deg(P'(X^2)) = \deg(4P(X)).$$

   Or on a $\deg(P'(X^2)) = \deg(P') \times \deg(X^2) = 2n - 2$ et $\deg(4P) = \deg(P) = n$. On obtient :

   $$2n - 2 = n \quad \Rightarrow \quad n = 2.$$

   Écrivons donc $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. On substitue dans l'équation :

   $$2aX^2 + b = 4aX^2 + 4bX + 4c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a = 4a \\ 4b = 0 \\ 4c = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0$$

   ce qui contredit que $a \neq 0$. Ainsi cette équation n'a pas de solution de degré $n \geq 2$.

   Finalement, l'ensemble des solutions de cette équation est $\{0\}$.

2. Soit P solution de l'équation.

   Tout d'abord, supposons que $\deg(P) \leq 1$. Dans ce cas, on a :

   $$P = \frac{1}{6}(X^2+1)P'' = 0.$$

   Donc $P = 0$ est le seul polynôme de degré ≤ 1 solution de cette équation.

   Supposons à présent que $\deg(P) = n \geq 2$. On a :

   $$\deg((X^2+1)P'') = 2 + n - 2 = n \quad \text{et} \quad \deg(P) = n.$$

   On n'obtient ici aucune information sur le degré de P, contrairement au cas précédent...

   Considérons plus précisément les coefficients dominants. Notons $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P. Alors le coefficient dominant de $(X^2+1)P''$ est $n(n-1)a_nX^n$ et celui de $6P$ est $6a_nX^n$. Puisque P est solution de l'équation, ces coefficients dominants sont égaux. Ainsi on a :

   $$n(n-1) = 6 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 3 \text{ ou } n = -2.$$

Ainsi, on a nécessairement que $\deg(P) = 3$. Notons alors $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$ et substituons dans l'équation :

$$\begin{aligned}(X^2+1)(6aX+2b) = 6aX^3+6bX^2+6cX+d \quad &\Rightarrow \quad 6aX^3+2bX^2+6aX+2b = 6aX^3+6bX^2+6cX+d \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} 6a = 6a \\ 2b = 6b \\ 6a = 6c \\ 2b = d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = c \\ d = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi on obtient $P = a(X^3 + X)$.

Réciproquement, on vérifie que tous les polynômes de la forme $a(X^3 + X)$ avec $a \in \mathbb{C}$ sont bien solution de l'équation.

Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation est $\{aX^3 + aX,\, a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^3 + X)$.

Exercice 24.3 (★★ - Multiplicité d'une racine)

1. Déterminer a et b pour que $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 pour racine double. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X-1)^2$?
2. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit le polynôme $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$. Calculer $P(X) - P'(X)$, puis en déduire que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 24.4 (★★★ - QSP ESCP 2016)

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement monotone.
2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$, alors $P = X$.

1. On a pour tout $n \geq 0$:
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 = P(u_n)$$
où $P = X^2 - X + 1$. On a $\Delta = -3$, et donc P est de signe constant, du signe du coefficient dominant, c'est à dire positif. Ainsi on a :
$$u_{n+1} - u_n = P(u_n) > 0$$
et (u_n) est strictement croissante.

2. Posons $Q = P(X) - X$ et montrons que $Q = 0$. Pour cela on va montrer que u_n est racine de Q pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Init. On a :
$$Q(u_0) = P(u_0) - u_0 = P(0) - 0 = 0.$$
D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n soit racine de Q. On a :
$$\begin{aligned}Q(u_{n+1}) = P(u_{n+1}) - u_{n+1} = P(u_n^2+1) - u_n^2 - 1 &= P(u_n)^2 + 1 - u_n^2 - 1 \\ &= P(u_n)^2 - u_n^2 = (P(u_n) - u_n)(P(u_n) + u_n) = 0\end{aligned}$$
par hypothèse de récurrence. Ainsi u_{n+1} est aussi racine de Q, d'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence que u_n est racine de Q pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme de plus (u_n) est strictement croissante, les termes de la suite sont deux à deux distincts. Q admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. D'où le résultat $P(X) = X$.

Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 24.5 (★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{(x,y,z,t),\ x+y+z-t=0\}$.
2. $G = \mathrm{Vect}((1,1,2),(0,1,0),(2,-3,4))$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0)=P(1)\}$.
4. $I = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 24.6 (★★)
Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et en donner une base, sa dimension ainsi qu'un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$.

On commence par montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$:

- $P=0$ est bien dans H puisque $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $P, Q \in H$, on a :

$$\int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{lin. de l'int.}}{=} \lambda \underbrace{\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ car } P\in H} + \mu \underbrace{\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ car } P\in H} = 0.$$

  Donc $\lambda P + \mu Q$ appartient bien à H.

H est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

On cherche à présent la dimension de H. Soit pour cela $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On a :

$$\begin{aligned} P \in H &\Leftrightarrow \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = -\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{n} - \cdots - \frac{a_1}{2} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} H &= \left\{ a_nX^n + \cdots + a_1X - \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{n} - \cdots - \frac{a_1}{2},\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \dots, X - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

$\left(X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \dots, X - \frac{1}{2} \right)$ est donc une famille génératrice de H. Elle est également libre car étagée en degrés. C'est donc une base de H, et H est de dimension n.

Remarque. On dit alors que H est un hyperplan de $E = \mathbb{R}_n[X]$ puisque de dimension $\dim(E) - 1$. On peut consulter à ce sujet le complément de cours sur les formes linéaires et hyperplans.

Un supplémentaire G de H est nécessairement de dimension 1, de la forme $G = \mathrm{Vect}(Q)$ où $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q \neq 0$. De plus, on doit choisir Q de telle sorte que $\left(X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \dots, X - \frac{1}{2}, Q \right)$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On a l'embarras du choix (ou le choix de l'embarras...) : prenons Q constant égal à 1 par exemple, de sorte que la famille obtenue est encore étagée en degré, donc libre. Comme elle est de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ceci prouve bien que $G = \mathrm{Vect}(1)$ est un supplémentaire de H dans $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\mathbb{R}_n[X] = H \oplus \mathrm{Vect}(1).$$

Remarques. Toujours à propos du complément de cours sur les formes linéaires et hyperplans.

- On avait montré qu'il suffisait de prendre $Q \notin H$ pour avoir $G = \text{Vect}(Q)$ supplémentaire de H. C'est bien ce qui se produit ici puisque $1 \notin H$.

- Il est démontré qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. On le constate ici avec pour forme linéaire :
$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R} \\ P & \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$
On vérifie que φ est linéaire (par linéarité de l'intégrale), non nulle ($\varphi(1) = 1 \neq 0$) et que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Ce qui prouve immédiatement que H est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $\dim(E) - 1 = n$ (par le théorème du rang).

Exercice 24.7 (★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$;
2. $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$;
3. (★) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$;
4. (★) $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(-x) = f(x)\}$ et $G = \{f \in E \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(-x) = -f(x)\}$.

4. Procédons par Analyse - Synthèse.

Analyse. Soit $h \in E$. Supposons qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que :
$$h = f + g, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) + g(x) \quad (*)$$
On a alors par parité de f et imparité de g que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) \quad (**)$$
On obtient en faisant respectivement $(*) + (**)$ et $(*) - (**)$:
$$h(x) + h(-x) = 2f(x) \quad \text{et} \quad h(x) - h(-x) = 2g(x).$$
Ainsi, f et g sont déterminés de manière unique par :
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{h(x) + h(-x)}{2} \quad \text{et} \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$

Synthèse. Posons alors $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{h(x) - h(-x)}{2}$, et vérifions les points suivants :

- $h = f + g$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :
$$f(x) + g(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} + \frac{h(x) - h(-x)}{2} = h(x).$$

- $f \in F$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :
$$f(-x) = \frac{h(-x) + h(-(-x))}{2} = \frac{h(x) + h(-x)}{2}.$$

- $g \in G$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :

$$g(-x) = \frac{h(-x) - h(-(-x))}{2} = \frac{h(-x) - h(x)}{2} = -\frac{h(x) - h(-x)}{2} = g(x).$$

On peut donc conclure que pour tout $h \in E$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. En d'autres termes, on a donc $E = F \oplus G$.

Exercice 24.8 (★★)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$f_1 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y, 2z, x - z) \in \mathbb{R}^3$;

$f_2 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto 2XP - (X^2 - 1)P' \in \mathbb{R}_2[X]$;

$f_3 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P + P' \in \mathbb{R}_3[X]$;

$f_4 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(X + 1) - P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$;

$f_5 : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$f_6 : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrons que f est linéaire pour commencer : soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), 2(\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x - y, 2z, x - z) + \mu(x' - y', 2z', x' - z') = \lambda f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. De plus $E = F = \mathbb{R}^3$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que f est un automorphisme, il suffit de montrer que f est injective. En effet, on rappelle le résultat important suivant.

> **Rappel.**
> Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors on a équivalence entre :
>
> $$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijective}$$
>
> Rappelons également que :
>
> - endomorphisme = linéaire + $E = F$,
> - isomorphisme = linéaire + bijectif,
> - automorphisme = linéaire + $E = F$ + bijectif.

On calcule donc son noyau (qui est bien souvent plus simple à déterminer que l'image) :

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. f est donc injective, et c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Puisque f est un automorphisme, f est en particulier surjective, de sorte que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. On a donc que $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Enfin, donnons la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$:

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. A faire.

3. Montrons que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit pour cela $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P + \mu Q + \lambda P' + \mu Q' \\ &= \lambda(P + P') + \mu(Q + Q') = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

De plus pour tout $P \in E$, on a $\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P), \deg(P')) \leq 3$. Donc f est un endomorphisme de E.

On cherche le noyau de f. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a $P' = 3aX^2 + 2bX + c$, et :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad aX^3 + (3a+b)X^2 + (2b+c)X + (c+d) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ 3a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et f est injective. Comme de plus f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**, on en déduit que f est bijective. C'est un automorphisme de E. En particulier, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_3[X]$, et $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

Reste à déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E. On calcule pour cela :

$$f(1) = 1, \quad f(X) = 1 + X, \quad f(X^2) = X^2 + 2X, \quad f(X^3) = X^3 + 3X^2.$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que A étant triangulaire supérieure avec des éléments non nuls sur la diagonale, A est inversible, ce qu'on savait puisque f est bijective.

Question supplémentaire. Est ce que f est diagonalisable ?

Comme A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale, de sorte que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Si A est diagonalisable, alors elle serait semblable et donc égale à I_4, ce qui n'est pas le cas. Donc A (et f) n'est pas diagonalisable.

4. Quelques exemples pour être sûr de bien comprendre qui est f :

- Si $P = \lambda \in \mathbb{R}$, $f(P) = P(X+1) - P(X) = \lambda - \lambda = 0$;
- Si $P = aX^2 + bX + c$, alors $f(P) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c$.

Rappelons que $P(X+1)$ peut être vu comme la composée de deux polynômes : si on pose $A = X+1$, on a $f(P) = P \circ A - P$.

Montrons que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit pour cela $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) + \lambda P(X) + \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

De plus pour tout $P \in E$, on a $\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P \circ A), \deg(P)) = \max(\deg(P) \times \deg(A), \deg(P)) \leq 2$. Donc f est un endomorphisme de E.

On cherche le noyau de f. Soit $P = aX^2 + bX + c$, on a :

$$P(X+1) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c = aX^2 + (2a+b)X + (a+b+c).$$

D'où :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad P(X+1) - P(X) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad 2aX + (a+b) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{c,\, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1)$, et f n'est pas injective. Comme (1) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ et constituée d'**un** vecteur non nul, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, de sorte que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$. Comme f est un endomorphisme en **dimension finie**, on en déduit directement que f n'est pas non plus surjective, et donc que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$. Par le théorème du rang, on a :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$ (qui est donc de dimension 2), utilisons que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)).$$

On calcule :

$$f(1) = 0, \quad g(X) = 1 + X - X = 1, \quad g(X^2) = (1+X)^2 - X^2 = 2X + 1.$$

Ainsi on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(0, 1, 1 + 2X) = \mathrm{Vect}(1, 1 + 2X).$$

La famille $(1, 1 + 2X)$ est donc génératrice, de cardinal égal à $\dim(\mathrm{Im}(f))$, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Reste à donner la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de E :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que B n'est pas inversible car triangulaire supérieure avec au moins un 0 sur la diagonale. Ce qu'on savait car f ne l'est pas non plus.

Question supplémentaire. Est ce que f est diagonalisable ?

Comme B est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale, de sorte que $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$. Si B est diagonalisable, alors elle serait semblable et donc égale à $0 \times I_3$, ce qui n'est pas le cas. Donc B (et f) n'est pas diagonalisable.

Notons enfin que B est triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente. Donc f l'est aussi.

5. A faire.

6. f est clairement à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus on a pour tout $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha AM + \beta AN - \alpha MA - \beta NA \\ &= \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA) = \alpha f(M) + \beta f(N). \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme de E.

Déterminons son noyau. Soit pour cela $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad AM - MA = 0_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = 0_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. La famille (I_2, B) est donc génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$, et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$, et on a $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$. Ainsi f n'est pas injective, et elle n'est pas non plus surjective puisque c'est un endomorphisme en dimension finie.

Par le théorème du rang, on a :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Déterminons l'image de f. On a (en notant $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i, j)) :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})).$$

On calcule alors :

$$f(E_{1,1}) = -E_{1,2}, \quad f(E_{1,2}) = 0, \quad f(E_{2,1}) = E_{1,1} - E_{2,2}, \quad f(E_{2,2}) = E_{1,2}.$$

D'où :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(-E_{1,2}, 0, E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}) = \operatorname{Vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}).$$

La famille $(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2})$ est génératrice, de cardinal 2 égal à la dimension de $\operatorname{Im}(f)$. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Reste à donner la matrice de f dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de E :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que C n'est pas inversible (par exemple parce que la deuxième colonne de C est nulle), ce qu'on savait car f n'est pas un automorphisme.

Exercice 24.9 (★★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z),\ x + 2y + z = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}(u)$ où $u = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. On note p le projecteur sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
   (c) Sans calcul supplémentaire, donner la matrice dans la base canonique de la projection sur G parallèlement à F.

1. Cherchons pour commencer une base et la dimension de F. On a :

   $$F = \{(-2y - z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1)).$$

   La famille $((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est donc génératrice de F. Elle est de plus libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F, et $\dim(F) = 2$.

   D'autre part, (u) est une famille génératrice de G (par définition de G) et libre car formée de **un** vecteur non nul. C'est donc une base de G.

   Pour montrer que $E = F \oplus G$, on va par exemple montrer que la concaténation des bases de F et de G, $\mathscr{B}' = (e_1 = (-2, 1, 0), e_2 = (-1, 0, 1), e_3 = (1, 1, 1))$, est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons pour cela qu'elle est libre. Soit donc $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$a(-2,1,0)+b(-1,0,1)+c(1,1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b+c=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c+c+c=0 \\ a=-c \\ b=-c \end{cases} \quad \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Donc $\mathscr{B}'$ est bien une famille libre. Comme son cardinal est $3=\dim(\mathbb{R}^3)$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. On obtient finalement que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. (a) Rappelons quelques propriétés des projecteurs.

> **Rappel. Projecteurs.**
> Soit $E = F \oplus G$, et soit p projecteur sur F parallèlement à G. On a :
> - $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - Id) = E_1(p)$, et donc :
> $$\forall y \in F, \quad p(y) = y.$$
> - $G = \mathrm{Ker}(p) = E_0(p)$, et donc :
> $$\forall z \in G, \quad p(z) = 0_E.$$

Comme $e_1, e_2 \in F$ et $e_3 \in G$, on a ici :

$$p(e_1) = e_1, \quad p(e_2) = e_2, \quad p(e_3) = 0.$$

On obtient donc que :

$$A' = M_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On utilise ici la formule de changement de bases. Rappelons le point de cours correspondant.

> **Rappel. Formules de changement de bases.**
> Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons :
> - A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$;
> - A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$;
> - P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
>
> Alors on a :
> $$A' = P^{-1}AP.$$

Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $A = M_{\mathscr{B}}(p)$. On a :

$$A' = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, c'est-à-dire :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

À l'aide du pivot de Gauss, on calcule P^{-1}. On obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Reste alors à calculer $A = PA'P^{-1}$. On trouve après calcul que :

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

(c) Encore un rappel :

Rappel. Projecteurs associés.
Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $q = Id_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. En effet si $z \in E$, alors en notant $(x, y) \in F \times G$ tels que $z = x + y$, on a :

$$q(z) = z - p(z) = x + y - x = y.$$

On a les relations :

$$p + q = Id_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

On dit que p et q sont les *projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$.

Notons donc q le projecteur sur G par rapport à F, de sorte que p et q sont des *projecteurs associés*, et ils satisfont :

$$p + q = \mathrm{Id}.$$

En particulier on a $q = \mathrm{Id} - p$ et donc :

$$M_{\mathscr{B}}(q) = I_3 - M_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.10 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. (★) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

1. Prouvons ces inclusion :
   - Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$. D'où en composant par f, on obtient $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Ainsi on a bien que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
   - Soit $z \in \mathrm{Im}(f^2)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = f^2(x) = f(\underbrace{f(x)}_{\in E}) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi on a bien $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

   Déjà vu ?
   Cela vous fait peut-être penser aux suites de noyaux et images itérées ? Voir l'exercice classique 6.6 à ce sujet.

2. On procède par double implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrons que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. On a déjà l'égalité des dimensions par le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, on a $y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $0_E = f(y) = f(f(x)) = f^2(x)$. Ainsi on a $x \in \mathrm{Ker}(f^2) \underset{hyp.}{=} \mathrm{Ker}(f)$. Donc $y = f(x) = 0_E$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

On peut donc conclure que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. On a déjà une inclusion (qui est toujours vraie) :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2).$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit pour cela $z \in \mathrm{Ker}(f^2)$. On a :

$$f(f(z)) = f^2(z) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f(z) \in \mathrm{Ker}(f).$$

Et par définition, on a $f(z) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi on a $f(z) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ car ces sous-espaces sont en somme directe par hypothèse. On peut donc conclure que $f(z) = 0_E$, et donc que z appartient à $\mathrm{Ker}(f)$. D'où l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$, et donc l'égalité.

Exercice 24.11 (★★ - Sous-espaces vectoriels stables par la dérivation)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par φ.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, non réduit au vecteur nul et stable par φ.
   (a) Soit $P \in F$ un polynôme de degré d. Montrer que $\mathbb{R}_d[X] \subset F$.
   (b) On note $p = \max\{\deg(P),\ P \in F\}$. Montrer que $F = \mathbb{R}_p[X]$.

1. Le fait que $\mathbb{R}_k[X]$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ est connu (cours). Montrons qu'il est stable par φ.

   Rappels. Sous-espace stable.
   Un sous-espace F de E est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ si :
   $$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$
   Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors :
   $$F \text{ stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, p]\!],\ f(e_i) \in F.$$

   Ici, on a $\mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k)$, et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$:
   $$\varphi(X^i) = iX^{i-1} \in \mathbb{R}_k[X],$$
   et $\varphi(1) = 0 \in \mathbb{R}_k[X]$. Donc $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel stable par φ.

2. (a) Soit $P \in F$ de degré $d \geq 0$. Par une récurrence immédiate, on a que $\varphi^i(P) \in F$ pour tout $0 \leq i \leq d$ car F stable par φ. Comme de plus F est un sous-espace vectoriel, on en déduit que :
   $$\mathrm{Vect}(P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)}) = \mathrm{Vect}(P, \varphi(P), \varphi^2(P), \dots, \varphi^d(P)) \subset F.$$
   Or $\mathscr{F} = (P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)})$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$, libre car échelonnée en degré ($\deg(P^{(i)}) = d - i$ pour tout $0 \leq i \leq d$). Comme $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{R}_d[X]) = d + 1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$. On obtient donc :
   $$\mathbb{R}_d[X] = \mathrm{Vect}(P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)}) \subset F.$$
   (b) Posons $p = \max\{\deg(P),\ P \in F\}$. Montrons que $F = \mathbb{R}_p[X]$ par double inclusion.
   $\subset$ Pour tout $P \in F$, on a $\deg(P) \leq p$ par définition de p. Donc on a $F \subset \mathbb{R}_p[X]$.

$\supset$ Prenons $P_0 \in F$ tel que $\deg(P_0) = p$. D'après la question précédente, on a $\mathbb{R}_p[X] \subset F$. D'où l'égalité voulue.

Exercice 24.12 (★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ soit une base de E.
2. En déduire le rang de f.

1. Puisque $f^3 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, il existe $x \in E$ tel que $f^3(x) \neq 0_E$. Montrons alors que la famille $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ est libre : soit pour cela $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :
$$ax + bf(x) + cf^2(x) + df^3(x) = 0_E.$$
Composons cette égalité par f^3. On obtient par linéarité de f :
$$af^3(x) + \underbrace{bf^4(x) + cf^5(x) + df^6(x)}_{=0_E \text{ car } f^4=0} = f^3(0_E) = 0_E.$$
D'où $af^3(x) = 0_E$, et puisque $f^3(x) \neq 0_E$, on obtient que $a = 0$. On a donc :
$$bf(x) + cf^2(x) + df^3(x) = 0_E.$$
En composant par f^2, on obtient de même que :
$$bf^3(x) = 0_E.$$
D'où $b = 0$ puisque $f^3(x) \neq 0_E$. En répétant ce procédé, on montre de même que $c = d = 0$. Donc la famille est libre. Comme de plus son cardinal est $4 = \dim(E)$, c'est donc une base de E.
2. On écrit la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (x, f(x), f^2(x), f^3(x))$:
$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(M_{\mathscr{B}}(f)) = 3$, d'où le résultat.

Autre méthode. Rappelons que si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors on a :
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$
Ici $\mathscr{B} = (x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ est une base de E, donc on a :
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(x), f(f(x)), f(f^2(x)), \underbrace{f(f^3(x))}_{=0_E}) = \operatorname{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x)).$$
La famille $(f(x), f^2(x), f^3(x))$ est libre, en tant que sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}$. Donc on a :
$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x))) = 3.$$

Exercice 24.13 (★★★★ - Oral ESCP 2012)
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n > 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.
Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \cdots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts.

1. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

(b) Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Soit $\pi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\pi(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$.

   (a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Déterminer le noyau et l'image de π.

   (c) On note $F = \left\{ Q\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-a_i),\ Q\in\mathbb{R}[X]\right\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.

   (d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$, $P \mapsto (P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.

   (a) Montrer que ε est un isomorphisme.

   (b) Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
   Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1,\cdots,a_n)$.

4. Soient $a,b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathscr{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ tels que $a \leq a_1 < \cdots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1,\cdots,a_n)$.

   (a) Soit $x \in [a,b] \setminus \{a_1,\cdots,a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par

   $$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - P(t) - K\prod_{i=1}^{n}(t-a_i).$$

   Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.

   (b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\varsigma \in [a,b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$.

   (c) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on a :

   $$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}|x-a_i|}{n!}\sup_{[a,b]}|f^{(n)}|.$$

1. (a) Fixons $i \in [\![1,n]\!]$. On va procéder par Analyse - Synthèse.

Analyse On a $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$, donc a_j est racine de L_i de sorte qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$L_i = \left(\prod_{1\leq j\neq i\leq n}(X-a_j)\right)Q.$$

Prenons le degré de cette expression :

$$n-1 \geq \deg(L_i) = \deg(Q) + n - 1 \quad \Rightarrow \quad \deg(Q) \leq 0.$$

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$L_i = \lambda\prod_{1\leq j\neq i\leq n}(X-a_j).$$

Enfin, on a :

$$L_i(a_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\displaystyle\prod_{1\leq j\neq i\leq n}(a_i-a_j)}.$$

Synthèse Posons $L_i = \prod_{1\leq j\neq i\leq n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$. On a $\deg(L_i = n-1$, $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$ et :

$$L_i(a_i) = \prod_{1\leq j\neq i\leq n} \underbrace{\frac{a_i-a_j}{a_i-a_j}}_{=1} = 1.$$

D'où l'existence et l'unicité d'un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

> **Déjà vu ?**
> Oui, et pas qu'un peu : ce sont les *polynômes de Lagrange* associés aux a_i, qui ont été introduit aux TD0, TD4 et TD6 par différentes méthodes.

(b) Montrons qu'elle est libre. Soit pour cela $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Résolvons :

$$\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}.$$

On évalue en a_i pour $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\underbrace{\lambda_1 L_1(a_i) + \cdots +}_{=0} \lambda_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} \underbrace{+ \cdots + \lambda_n L_n(a_i)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0.$$

La famille (L_i) est donc libre, de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. (a) Montrons que π est linéaire. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\pi(\lambda P + \mu Q) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda P + \mu Q)(a_i) L_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i + \mu \sum_{i=1}^{n} Q(a_i) L_i = \lambda\pi(P) + \mu\pi(Q)$$

Donc π est linéaire. De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\pi \circ \pi(P) = \pi\left(\sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i\right) \underset{=}{\pi \text{ lin.}} \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\pi(L_i)$$

Or on a pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\pi(L_i) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{L_i(a_j)}_{=\delta_{i,j}} L_j = L_i.$$

En substituant dans le calcul précédent, on obtient :

$$\pi \circ \pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i = \pi(P)$$

Ainsi on a $\pi \circ \pi = \pi$, et π est bien un projecteur.

(b) Déterminons $\mathrm{Ker}(\pi)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\pi) \Leftrightarrow \pi(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0 \quad \text{car la famille } (L_i) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = Q\prod_{i=1}^{n}(X-a_i). \end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathrm{Ker}(\pi) = \{Q\prod_{i=1}^{n}(X-a_i),\ Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i \in \operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n).$$

Donc $\operatorname{Im}(\pi)$ est inclus dans $\operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n)$. De plus, on a vu que $L_i = \pi(L_i) \in \operatorname{Im}(\pi)$. D'où l'inclusion réciproque, et donc que $\operatorname{Im}(\pi) = \operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n)$.

(c) Comme π est un projecteur, on a :

$$\mathbb{R}[X] = \operatorname{Ker}(\pi) \oplus \operatorname{Im}(\pi) = F \oplus \operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n).$$

Comme de plus, (L_i) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on en déduit que $\operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'où le résultat.

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \operatorname{Im}(\pi)$. On a :

$$P = \pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i.$$

Ce qui donne les coordonnées de P dans la base (L_i).

Autre méthode. Par un calcul direct, on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n.$$

Évaluons cette égalité en a_i pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$P(a_i) = \underbrace{\lambda_1 L_1(a_i) + \cdots +}_{=0} \lambda_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} \underbrace{+ \cdots + \lambda_n L_n(a_i)}_{=0} = \lambda_i.$$

3. (a) L'application ε, d'après ce qui précède, associe à $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ses coordonnées dans la base (L_i). Par le cours, ε est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ (on a ici identifié $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$...).

Autre méthode. On l'avait déjà fait en TD, voir l'exercice 6.4.

(b) On cherche $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ satisfaisant

$$(f(a_1), \dots, f(a_n)) = (P(a_1), \dots, P(a_n)) = \varepsilon(P).$$

Comme $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, il existe bien un tel polynôme, et il est de plus unique.

4. (a) On cherche $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\varphi(x) = 0 \quad \underset{x \neq a_i}{\Leftrightarrow} \quad K = \frac{f(x) - P(x)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x - a_i)}.$$

(b) Notons tout d'abord que φ est de classe $\mathscr{C}^n$ comme composée de fonctions qui le sont.

On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(a_i) = 0$, et $\varphi(x) = 0$. Donc φ s'annule en $(n+1)$ réels distincts de $[a, b]$.

Par le théorème de Rolle appliqué entre chacune des racines de φ, on montre que $\varphi^{(1)}$ admet (au moins) $n = (n+1) - 1$ racines distinctes sur $[a, b]$. En répétant ce procédé (de « Rolle en cascade »), on en déduit que $\varphi^{(n)}$ admet (au moins) $(n+1) - n = 1$ racine réelle $\varsigma \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$.

(c) Ainsi on a $f^{(n)}(\varsigma) - n!K = 0$ (car $\deg(P) \leq n-1$), ce qui se réécrit :

$$\frac{f(x) - P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)} = K = \frac{f^{(n)}(\varsigma)}{n!}.$$

Comme $|f^{(n)}|$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet une borne supérieure. En prenant les valeurs absolues, on obtient donc que pour tout $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$:

$$|f(x) - P(x)| = \sup_{[a,b]} |f^{(n)}| \frac{\prod_{i=1}^{n} |x - a_i|}{n!}.$$

Le résultat est encore vrai si x est l'un des a_i, d'où la conclusion.

Diagonalisation

Exercice 24.14 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, en déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- La matrice B est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc sur sa diagonales, de sorte que $\mathrm{Sp}(B) = \{2, -1\}$.

  On a :

$$B + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  de rang 1. Par le théorème du rang, $\dim(E_{-1}(B)) = 3 - 1 = 2$.

  D'autre part, on a :

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

  de rang 2, d'où $\dim(E_2(B)) = 3 - 2 = 1$ toujours par le théorème du rang.

  Comme $\dim(E_{-1}(B)) + \dim(E_2(B)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, B est bien diagonalisable.

  On cherche une base de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \Leftrightarrow x = 0$$

  Ainsi, on a $E_{-1}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $E_{-1}(B)$, et libre car **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de cet espace.

D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(B) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 3y = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

d'où $E_2(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $E_2(B)$, et libre car formée de **un** vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(B)$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage entre la base canonique et la base de diagonalisation de B, on obtient donc (par formule de changement de bases) :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Observons tout d'abord que $C_2(C) = 3C_1(C)$ et $C_3(C) = 0_{3,1}$, de sorte que :

$$\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(C_1(C), C_2(C), C_3(C)) = \mathrm{Vect}(C_1(C)).$$

Donc $\mathrm{rg}(C) = \dim \mathrm{Im}(C) = 1$, et 0 est valeur propre de C avec $\dim(E_0(C)) = 3 - 1 = 2$. On propose alors deux méthodes pour étudier la diagonalisabilité de C.

Méthode 1. À l'aide d'un polynôme annulateur.

On a $C^2 = 0_3$, de sorte que X^2 est un polynôme annulateur de C. 0 est donc la seule valeur propre possible de C, et c'est effectivement une valeur propre de C puisque $\dim(E_0(C)) = 2$. Comme $\dim(E_0(C)) < 3$, on peut donc conclure que C n'est pas diagonalisable.

Méthode 2. Par l'absurde.

Supposons que C soit diagonalisable. On a déjà une valeur propre 0 avec $\dim(E_0(C)) = 2$. Pour obtenir la dernière valeur propre λ, on utilise la trace :

$$0 + 0 + \lambda = \mathrm{Tr}(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

Ainsi 0 serait l'unique valeur propre de C. Mais dans ce cas $\dim(E_0(C)) = 2 \neq 3$ et C ne serait pas diagonalisable... On peut donc conclure que C n'est pas diagonalisable.

- On observe que :

$$D - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1. Donc 4 est valeur propre et $\dim(E_4(D)) = 3 - 1 = 2$.

Pour trouver la dernière valeur propre λ, faisons le raisonnement suivant : si D était diagonalisable, on aurait à l'aide de la trace :

$$4 + 4 + \lambda = \mathrm{Tr}(D) = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2.$$

Tentons de voir si 2 est bien valeur propre de D :

$$D - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{rg}(D - 2I_3) = 2 < 3$, et 2 est valeur propre de D avec $\dim(E_2(D)) = 3 - 2 = 1$.

On obtient $\dim(E_4(D)) + \dim(E_2(D)) = 3$, donc D est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(D) = \{2, 4\}$.

On cherche une base de chacun des sous-espaces propres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(D) \Leftrightarrow -x+y-z=0.$$

Ainsi $E_4(D) = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y,z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de $E_4(D)$, et libre car **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $E_4(D)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(D) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}.$$

Ainsi $E_4(D) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de $E_2(D)$, et libre car **un** vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(D)$.

On obtient donc comme matrice de passage entre la base canonique et la base de diagonalisation la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par formule de changement de base :

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.15 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)
Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. (★) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) On a :
   $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   de sorte que $A^3 - 2A^2 = 0_n$. Ainsi $P = X^3 - 2X^2 = X^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de A et donc aussi de f.
   (b) Les valeurs propres **possibles** de f sont **parmi** les racines de $P = X^2(X-2)$, c'est-à-dire 0 et 2. Vérifions que 0 et 2 sont effectivement valeurs propres de f :
   - A est de rang 2 car on a $C_2(A) = -C_3(A)$ et que $C_1(A)$ et $C_2(A)$ ne sont pas colinéaires. Donc $\dim(E_0(A)) = 3-2 = 1$ par le théorème du rang, et 0 est bien valeur propre de A (et de f).
   - On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ de rang 2 car $C_1(A) = -C_2(A)$ et que $C_1(A)$ et $C_3(A)$ ne sont pas colinéaires. Donc $\dim(E_2(A)) = 3-2 = 1$ toujours par le théorème du rang, et 2

est aussi valeur propre de A (et de f).

On peut donc conclure que $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}$.

(c) Comme $\dim(E_0(f)) + \dim(E_2(f)) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, f n'est pas diagonalisable.

2. Procédons par analyse-synthèse pour la recherche de cette base.

Analyse. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

On a donc $f(e_1) = 0_{3,1}$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 2e_3$. Ainsi $e_1 \in E_0(f)$ et $e_3 \in E_2(f)$, et e_2 est un antécédent de e_1 par f.

Synthèse. Déterminons une base des sous-espaces propres $E_0(f)$ et $E_2(f)$. On a :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme de plus $\dim(E_0(f)) = \dim(E_2(f)) = 1$, on obtient :

$$E_0(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Prenons donc $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On cherche à présent $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que :

$$f(e_2) = e_1 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 & \\ 4y - 4z = 1 & (2) + (1) \\ 4y - 4z = 1 & (3) + 2(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/4 \\ y - z = 1/4 \end{cases}$$

Prenons par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ convient :

- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :
$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{3,1}.$$
En appliquant f, on a :
$$be_1 + 2ce_3 = 0_{3,1},$$
et en réappliquant f une seconde fois :
$$4ce_3 = 0_{3,1}.$$
Donc $c = 0$, puis en remplaçant dans la deuxième équation $b = 0$, et dans la première $a = 0$. Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre. Comme est de plus de cardinal $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est donc une base de cet espace.
- On a par construction $f(e_1) = 0_{3,1}$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 2e_3$. Donc on a bien $T = M_{\mathscr{B}}(f)$.

D'où le résultat.

Exercice 24.16 (★★ - Extrait de EML 2013)
Soit $n \geq 2$ un entier. Soit L un élément non nul de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On pose $A = CL$ et $a = \mathrm{Tr}(A)$.

1. Déterminer les coefficients de A à l'aide des coefficients de C et L.
2. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Montrer que $LC = (a)$, puis $A^2 = aA$.
4. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. On suppose $a \neq 0$. Calculer AC. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
6. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

1. Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix}$ On a :
$$A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 l_1 & \dots & c_1 l_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n l_1 & \dots & c_n l_n \end{pmatrix}.$$
2. Soit $1 \leq i \leq n$. On a $C_i(A) = l_i C$ où $C_i(A)$ désigne la i-ème colonne de la matrice A, de sorte que :
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) \subset \mathrm{Vect}(C).$$
Ainsi $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))) \leq \dim(\mathrm{Vect}(C)) = 1$ car $C \neq 0_{n,1}$. Comme de plus $C \neq 0_{n,1}$ et $L \neq 0_{1,n}$, il existe $1 \leq i, j \leq n$ tels que $c_i \neq 0$ et $l_j \neq 0$. En particulier, on a $[A]_{i,j} = c_i l_j \neq 0$ et $\mathrm{rg}(A) \geq 1$.

   Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 1$, 0 est valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$ par le théorème du rang.
3. On a :
$$LC = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i l_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} \right) = (a).$$
D'où :
$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = C(a)L = aCL = aA.$$
4. Si $a = 0$, alors $A^2 = 0_n$ et X^2 est un polynôme annulateur de A. 0 est donc l'unique valeur propre possible de A. Et elle est bien valeur propre de A d'après 2. On en déduit que :
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_0(A)) = n - 1 < n.$$
A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Supposons $a \neq 0$. On a :
$$AC = (CL)C = C(LC) = C(a) = aC.$$
Comme $C \neq 0_{n,1}$, C est donc vecteur propre de A associé à la valeur propre a, et $\dim(E_a(A)) \geq 1$.

   On obtient alors :
$$n = (n-1) + 1 \leq \dim(E_0(A)) + \dim(E_a(A)) \underset{\text{cours}}{\leq} n.$$
On en déduit que $\dim(E_0(A)) + \dim(E_a(A)) = n$. Ainsi A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$ et $\dim(E_a(A)) = 1$.
6. $A = CL$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 24.17 (★★)
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \geq 2)$ défini par $[f(P)](X) = P(aX+b)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique. En déduire les valeurs propres de f.
2. Montrer que si $a \notin \{-1,1\}$, alors f est diagonalisable.
3. Si $a=1$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

1. Commençons tout d'abord par bien comprendre qui est f. Si on note $Q = aX+b$, on a :

$$f : P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \mapsto P \circ Q = \sum_{i=0}^{n} p_i Q^i.$$

Faisons quelques exemples, avec $P_1 = X^2+2X+1$, $P_2 = X$ et $P_3 = 2$:

$$f(P_1) = P_1 \circ Q = Q^2 + 2Q + 1 = (aX+b)^2 + 2(aX+b) + 1.$$

$$f(P_2) = P_2 \circ Q = Q = (aX+b).$$

$$f(P_3) = P_3 \circ Q = 2.$$

Montrons que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\alpha P_1 + \beta P_2) = (\alpha P_1 + \beta P_2) \circ Q = \alpha P_1 \circ Q + \beta P_2 \circ Q = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2).$$

Donc f est linéaire. De plus on a pour tout $P \in E$ (puisque $\deg(Q) \geq 1$) :

$$\deg(f(P)) = \deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q) = \deg(P) \times 1 = \deg(P).$$

Donc f est un endomorphisme de E.

Reprenons le fil de l'exercice. Posons $P_k = X^k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Pour obtenir la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$, on calcule :

$$f(P_k) = P_k \circ Q = Q^k = (aX+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i} X^i.$$

On en déduit :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & a & \binom{2}{1}ab & & \binom{n}{1}ab^{n-1} \\ 0 & \ddots & a^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}a^{n-1}b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n}a^n \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale. Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = \{1, a, a^2, \dots, a^n\}$.

2. Soit $0 \leq k < \ell \leq n$, on a :

$$a^k = a^\ell \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = a^{\ell-k} \Rightarrow |a| = 1.$$

Si $a \neq \pm 1$, les a^k pour $0 \leq k \leq n$ sont donc deux à deux distincts. f admet donc $n+1$ valeurs propres distinctes et est un endomorphisme de E de dimension $n+1$. Donc f est diagonalisable.

3. Si $a = 1$, on a alors :
$$A = M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}b & & \binom{n}{1}b^{n-1} \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a dans ce cas $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, et A est diagonalisable si et seulement si $A = I_{n+1}$. Or ceci est équivalent à $b = 0$, et à $Q = X$. Ainsi f est diagonalisable si et seulement si $b = 0$, et dans ce cas $f = Id_E$.

Exercice 24.18 (★★)
Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

On commence par chercher les valeurs propres de A, qui sont les racines du polynôme :
$$X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + (1 - 2\lambda).$$
On calcule le discriminant :
$$\Delta = 4 - 4(1 - 2\lambda) = 8\lambda.$$
On a alors trois cas possibles :

- Si $\lambda > 0$, alors $\Delta > 0$ et A admet 2 valeurs propres réelles distinctes. Comme $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- Si $\lambda = 0$, alors $\Delta = 0$ et $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = (X-1)^2$. Donc A admet une unique valeur propre 1. Dans ce cas A est diagonalisable si et seulement si $A = 1I_2 = I_2$, ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable dans ce cas (ni dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, ni dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$).
- Si $\lambda < 0$, alors $\Delta < 0$. Donc A n'a pas de valeur propre réelle, et n'est donc pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Elle admet cependant deux valeurs propres complexes distinctes. Comme $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit donc que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ (les valeurs propres et les vecteurs propres seront complexes dans ce cas).

Exercice 24.19 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)
On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieurs ou égal à 2. On note e_0, e_1, e_2 les polynômes de E définis par $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$. On rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division euclidienne par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que
$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P) \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Déterminer $f(e_0), f(e_1), f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3Id).$$
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.20 (★★ - Extrait d'Edhec 2006)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'il existe deux complexes λ_1, λ_2 distincts tels que $(f - \lambda_1 Id) \circ (f - \lambda_2 Id) = 0$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}((f-\lambda_1 Id)-(f-\lambda_2 Id))=Id$.
2. En déduire que $\mathbb{C}^n=\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)\oplus\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

> 1. On a :
> $$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}((f-\lambda_1 Id)-(f-\lambda_2 Id))=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}((\lambda_2-\lambda_1)Id)=Id.$$
> 2. Montrons que $\mathbb{C}^n=\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)\oplus\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.
>   - Soit $x\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)\cap\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. d'après l'identité de la question précédente que :
> $$x=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}((f-\lambda_1 Id)-(f-\lambda_2 Id))(x)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\underbrace{(f-\lambda_1 Id)(x)}_{=0_E \text{ car } x\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)}-\underbrace{(f-\lambda_2 Id)(x)}_{=0_E \text{ car } x\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id))}\right)=0_E.$$
>   Ainsi, on a bien $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)\cap\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)=\{0_E\}$.
>
>   **Autre méthode.** Si $x\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)\cap\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$, alors on a $f(x)=\lambda_1 x$ et $f(x)=\lambda_2 x$. D'où en soustrayant, $(\lambda_1-\lambda_2)x=0_E$, et donc $x=0_E$ puisque $\lambda_1\neq\lambda_2$.
>   - Soit $x\in E$, on a toujours par l'identité de la question précédente :
> $$x=\underbrace{\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(f-\lambda_1 Id)(x)}_{=:y}+\underbrace{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(f-\lambda_2 Id)(x)}_{=:z}.$$
>   On a :
> $$(f-\lambda_2 Id)(y)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\underbrace{(f-\lambda_2 Id)\circ(f-\lambda_1 Id)}_{=0_{\mathscr{L}(E)}}(x)=0_E$$
>   de sorte que $y\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. De même, on montre que $z\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$. Résumons : on a donc montré que pour tout $x\in E$, il existe $(y,z)\in\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)\times\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ tel que $x=y+z$. Ce qui signifie par définition que :
> $$E=\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)+\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id).$$
>
>   Avec les deux points précédents, on peut donc conclure que $\mathbb{C}^n=\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)\oplus\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.
> 3. On considère $\mathscr{B}_1$ une base de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ (éventuellement vide si $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)=\{0_E\}$) et $\mathscr{B}_2$ une base de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. Puisque $\mathbb{C}^n=\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)\oplus\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$, la concaténation $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{C}^n$, qui est constituée de vecteurs propres de f. Ainsi f est bien diagonalisable.

Exercice 24.21 (★★ - Racines carrées d'une matrice diagonalisable (EML 2009))

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f\circ g=g\circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
   (a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (c) Justifier que f est diagonalisable.
   Montrer que, pour toute base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.

   On appelle racine carrée de A toute matrice $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2=A$.

(a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

(b) Donner un exemple de racine carrée de A (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).

(c) Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

(d) Établir qu'il existe exactement 2^n racines carrées de A.

1. (a) C'est du cours (Chapitre 9). Redémontrons le malgré tout. Soit donc λ une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé. On souhaite montrer que :

$$\forall x \in E_\lambda(f), \quad g(x) \in E_\lambda(f).$$

Soit donc $x \in E_\lambda(f)$, on a :

$$f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

On a bien $g(x) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda Id) = E_\lambda(f)$. Donc le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g.

(b) Notons pour commencer que comme f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes, les sous-espaces propres de f sont tous de dimension 1. Soit v un vecteur propre associé à une valeur propre λ de f, on a par conséquent (puisque $v \neq 0_E$ en tant que vecteur propre) que :

$$E_\lambda = \operatorname{Vect}(v).$$

D'après la question précédente, on a :

$$g(v) \in E_\lambda = \operatorname{Vect}(v) \quad \Rightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R},\, g(v) = \mu v.$$

Donc v est bien vecteur propre de g.

(c) f admettant n valeurs propres distinctes dans un espace $\mathbb{R}^n$ de dimension n, f est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_1$. Pour une telle base, notons $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Donc g est bien diagonalisable.

2. (a) Comme A admet n valeurs propres deux à deux distinctes, A est diagonalisable, et il existe une matrice P inversible et D diagonale telles que :

$$P^{-1}AP = D.$$

(b) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A telles que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Cherchons tout d'abord D' diagonale telle que $D'^2 = D$. Une solution évidente à cette équation est :

$$D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

puisqu'on a alors bien $D'^2 = D$. Et :

$$A = PDP^{-1} = PD'^2P^{-1} = PD'I_nD'P^{-1} = (PD'P^{-1})(PD'P^{-1}) = B^2$$

en posant $B = PD'P^{-1}$. On a donc obtenu une racine carrée B de A.

(c) Soit R telle que $R^2 = A$. On a :

$$AR = R^2R = RR^2 = RA.$$

Donc les matrices R et A commutent.

Si on note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et R, on est ramené au cas de la question 1. : f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes (et strictement positives), et g commute avec f. Si on note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ telle que P soit la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$, on a par formule de changement de bases que :

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}M_{\mathscr{B}_0}(f)P = M_{\mathscr{B}}(f).$$

Comme D est diagonale, $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de f. D'après 1.(c), on en déduit que :

$$P^{-1}RP = P^{-1}M_{\mathscr{B}_0}(g)P = M_{\mathscr{B}}(g)$$

est une matrice diagonale également.

(d) Notons comme précédemment $M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$. On a :

$$R^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}R^2P = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}RP)^2 = D,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu_1^2 = \lambda_1 \\ \dots \\ \mu_n^2 = \lambda_n \end{cases} \quad \underset{\lambda_i > 0}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} \mu_1 = \pm\sqrt{\lambda_1} \\ \dots \\ \mu_n = \pm\sqrt{\lambda_n} \end{cases}.$$

On a exactement 2^n solutions $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de ce système. Par suite, il existe exactement 2^n solutions pour $P^{-1}RP$, et donc pour R. A possède donc exactement 2^n racines carrées qui sont :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}P$$

avec $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exercice 24.22 (★★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable possédant p valeurs propres distinctes.

1. Montrer que A possède un polynôme annulateur P de degré p, et que tout polynôme annulateur non nul de A est de degré supérieur ou égal à p.
2. Montrer que la dimension de $\mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^k)$ vaut $k+1$ si $k < p$ et p sinon.

1. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. Soit $P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p)$.

   Soit Q un polynôme annulateur de A. D'après le cours, les valeurs propres de A sont parmi les racines de Q. Ainsi $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont racines de Q. Comme elles sont deux à deux distinctes, le polynôme $P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p)$ divise Q. Puisque $Q \neq 0$, on a donc $\deg(Q) \geq p$.

   Montrons à présent que P est annulateur de A. Puisque A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale :

   $$D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p \text{ fois}})$$

   où m_i est la dimension du sous-espace propre associé à λ_i. Puisque A et D sont semblable, elles ont les mêmes polynômes annulateurs. Enfin on a (puisque D est diagonale) :

$$P(D) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_p), \ldots, P(\lambda_p)) = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0) = 0_n.$$

P est donc annulateur de D, et donc de A.

Remarque. Nous avions déjà démontré une partie de ce résultat à la fin du Chapitre 13 : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, alors $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de A.

2. Commençons par montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$ est libre. Soit pour cela $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{p-1} A^{p-1} = 0.$$

On a alors $Q(A) = 0$ avec $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{p-1} X^{p-1}$. D'après la question précédente, on en déduit que Q est nécessairement le polynôme nul. Ainsi on a $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$. Donc la famille est libre.

Pour tout $k < p$, on en déduit que la famille $(I_n, A, \ldots, A^k)$ est libre en tant que sous-famille d'une famille libre. Donc on a :

$$\dim \operatorname{Vect}(I_n, A, \ldots, A^k) = \operatorname{rg}(I_n, A, \ldots, A^k) = k + 1.$$

Supposons à présent $k \geq p$, et montrons que :

$$\operatorname{Vect}(I_n, A, \ldots, A^k) = \operatorname{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{p-1}).$$

Ceci permettra alors de conclure puisque $\dim(\operatorname{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{p-1})) = p$. Pour montrer cette égalité, il suffit de montrer que pour tout $k \geq p$, on a $A^k \in \operatorname{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$. On propose deux méthodes.

Méthode 1. Par récurrence. Écrivons pour cela $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p) = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ (P est unitaire).

Init. Pour $k = p$, on a :

$$P(A) = 0 \Rightarrow A^p = -a_0 I_n - a_1 A - \cdots - a_{p-1} A^{p-1} \in \operatorname{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$$

D'où la propriété pour $k = p$.

Hér. Soit $k \geq p$ et supposons la propriété au rang k. On a par hypothèse de récurrence :

$$A^k \in \operatorname{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$$

Donc il existe $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^k = b_0 I_n + b_1 A + \cdots + b_{p-1} A^{p-1}.$$

On multiplie par A cette égalité :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= b_0 A + b_1 A^2 + \cdots + b_{p-2} A^{p-1} + b_{p-1} A^p \\ &= b_0 A + b_1 A^2 + \cdots + b_{p-2} A^{p-1} + b_{p-1}(-a_0 I_n - a_1 A - \cdots - a_{p-1} A^{p-1}) \\ &\in \operatorname{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{p-1}) \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang $k + 1$.

On conclut par principe de récurrence.

Méthode 2. Soit $k \geq p$. On effectue la division euclidienne de X^k par P. Il existe Q et R des polynômes tels que :

$$X^k = P \times Q + R \quad \text{avec } \deg(R) < p.$$

On évalue en A :

$$A^k = \underbrace{P(A)}_{=0_n} \times Q(A) + R(A) = R(A) \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$$

car $\deg(R) < p$. D'où le résultat.

Exercice 24.23 (★★★★ - Polynômes minimaux (Oral ESCP 2016))

1. Soit un entier $n \geq 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de M.
   (a) Justifier que $\mathscr{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul.
   (b) Vérifier que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
   (c) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall Q \in \mathscr{A}$, $PQ \in \mathscr{A}$.
   (d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathscr{A}$ de degré minimal. Soit $K \in \mathscr{A}$ un polynôme unitaire de degré minimal.
   En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de $\mathscr{A}$. En déduire que
   $$\mathscr{A} = \{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$
   Un tel polynôme s'appelle polynôme minimal de M.
2. Exemples.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le polynôme minimal de λI_n, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
   (b) Soit P la matrice d'un projecteur p distinct de 0 et Id. Déterminer le polynôme minimal de P.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme minimal K. Montrer que l'ensemble des racines de K est égal à l'ensemble des valeurs propres de M.

1. (a) C'est du cours (plus précisément Chapitre 6 - Propriété 30). Rappelons l'argument utilisé : la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 dans un espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n^2. Cette famille est donc liée, de sorte qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n^2}) \neq (0, \dots, 0)$ tels que :
   $$a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_{n^2} M^{n^2} = 0_n.$$
   Le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$ est donc annulateur de M, et est non nul. Ainsi $P \in \mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul (qui est bien lui aussi annulateur de M).
   (b) On vient de montrer que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Montrons que cet ensemble est stable par combinaison linéaire. Soit pour cela $P, Q \in \mathscr{A}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a :
   $$(\alpha P + \beta Q)(M) = \alpha P(M) + \beta Q(M) = \alpha 0_n + \beta 0_n = 0_n.$$
   Donc $(\alpha P + \beta Q) \in \mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
   (c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathscr{A}$. Montrons que $P \times Q \in \mathscr{A}$:
   $$(P \times_{\mathbb{C}[X]} Q)(M) = P(M) \times_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})} Q(M) = P(M) \times 0_n = 0_n.$$
   Donc $P \times Q$ appartient bien à $\mathscr{A}$.

   Remarque. Un sous-ensemble de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant 1.(b) et 1.(c) est appelé un *idéal* de $\mathbb{C}[X]$, notion qui dépasse le programme d'ECS.

   (d) L'ensemble $\{\deg(P),\ P \in \mathscr{A} \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (d'après la question 1.(a)). Elle admet donc un plus petit élément $d \geq 0$. Considérons $P \in \mathscr{A}$ tel que $\deg(P) = d$. P est bien un polynôme non nul de $\mathscr{A}$ et de degré minimal. Quitte à le normaliser (c'est-à-dire à le diviser par son coefficient dominant), on peut supposer de plus qu'il est unitaire (il appartiendra alors toujours à $\mathscr{A}$ car $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel).

Dans la suite, on prend $K \in \mathscr{A}$ unitaire de degré minimal (on vient de voir qu'un tel polynôme existe bien). Montrons que :

$$\mathscr{A} = \{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

$\supset$ D'après la question 1.(b), on a $KQ \in \mathscr{A}$ pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$ puisque $K \in \mathscr{A}$. D'où l'inclusion $\{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\} \subset \mathscr{A}$.

$\subset$ Soit $P \in \mathscr{A}$. Effectuons la division euclidienne de P par K. Il existe un unique coupe $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$P = KQ + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(K).$$

En évaluant cette égalité en M, on obtient :

$$0_n = P(M) = K(M) \times Q(M) + R(M) = 0_n \times Q(M) + R(M) = R(M).$$

Ainsi on a $R \in \mathscr{A}$ avec $\deg(R) < \deg(K) = d$. Par définition de d (K de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathscr{A}$), on a donc nécessairement $R = 0$. On obtient donc :

$$P = KQ + R = KQ \in \{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

D'où l'inclusion réciproque.

D'où l'égalité des deux ensembles.

Remarque. Cela permet en particulier de montrer que le polynôme minimal d'une matrice M est unique. En effet, si K_1 et K_2 sont deux polynômes minimaux de M, alors on aurait :

$$K_2 \in \mathscr{A} = \{K_1Q,\ Q \in \mathbb{C}[X]\} \quad \Rightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{C}[X],\ K_2 = K_1 \times Q.$$

En prenant les degrés, on obtient :

$$\deg(K_2) = \deg(K_1) + \deg(Q).$$

Or $\deg(K_2)$ et $\deg(K_1)$ sont égaux par définition des polynômes minimaux. Donc $\deg(Q) = 0$, et il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$K_2 = \lambda K_1.$$

Comme enfin ces deux polynômes sont unitaires, $\lambda = 1$ et $K_1 = K_2$. On parlera donc **du** polynôme minimal de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (et non pas **d'un** polynôme minimal de M).

2. (a) Le polynôme $K = X - \lambda$ est annulateur de λI_n, unitaire. Et il est de degré minimal : en effet si P est annulateur de λI_n et $\deg(P) < 1$, alors P est constant de la forme a avec $a \in \mathbb{C}$. Et on a dans ce cas $0_n = P(\lambda I_n) = aI_n$ qui est nul si et seulement si $a = 0$. P est le polynôme nul alors.

   (b) Comme $P^2 = P$, $K = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de P.

   Montrons que c'est le polynôme minimal de P. Notons pour cela que comme p est distinct de 0 et Id, $G = E_0(p) \leq \{0\}$ et $F = E_1(p) \neq \{0\}$, et donc 0 et 1 sont valeurs propres de p, et de P aussi. Si Q est un polynôme annulateur non nul de p, 0 et 1 sont donc parmi ses racines. Ainsi il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que :

   $$Q = X(X-1)R = K \times R \quad \text{de degré } \geq 2.$$

   Ainsi K est bien unitaire et de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de P. C'est donc le polynôme minimal.

3. Comme K est annulateur de M, les valeurs propres de M sont parmi les racines de K. On souhaite montrer que ce sont exactement les racines de K. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de K. Supposons par

l'absurde que a ne soit pas valeur propre de M. Comme $K(a)=0$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ non nul (car K est non nul) tel que :

$$K = (X-a)Q \quad \text{ce qui donne} \quad 0_n = (M - aI_n)Q(M).$$

Mais comme a n'est pas valeur propre de M, la matrice $M - aI_n$ est inversible, de sorte que $Q(M) = 0_n$. Q serait alors un polynôme annulateur de M non nul et de degré $< \deg(K)$. C'est contradictoire avec la définition de polynôme minimal.

Ainsi l'ensemble des racines de K est égal à $\mathrm{Sp}(M)$.

Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques

Exercice 24.24 (★)

Pour $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = Tr(\,{}^tAB)$. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en déterminer une base et la dimension.
3. Déterminer une base de $F^\perp$.
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur F et en déduire $\min\limits_{B \in F} \|A - B\|$.

1. Montrons que l'application $(M,N) \mapsto \langle M, N\rangle = Tr(\,{}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   - *Linéarité à gauche.* Soient $(M_1, M_2, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^3$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\begin{aligned} \langle \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2, N\rangle &= \mathrm{Tr}(\,{}^t(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)N) \\ &= \mathrm{Tr}((\lambda_1\,{}^tM_1 + \lambda_2\,{}^tM_2)N) \text{ par lin. de la transposition} \\ &= \mathrm{Tr}(\lambda_1\,{}^tM_1N + \lambda_2\,{}^tM_2N) \\ &= \lambda_1 \mathrm{Tr}(\,{}^tM_1N) + \lambda_2 \mathrm{Tr}(\,{}^tM_2N) \text{ par lin. de la trace} \\ &= \lambda_1\langle M_1, N\rangle + \lambda_2\langle M_2, N\rangle \end{aligned}$$

   D'où la linéarité à gauche.
   - *Symétrie.* Soient $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

   $$\langle N, M\rangle = \mathrm{Tr}(\,{}^tNM) = \mathrm{Tr}(\,{}^t(\,{}^tMN)) = \mathrm{Tr}(\,{}^tMN) = \langle M, N\rangle$$

   D'où la symétrie, et par conséquent la linéarité à droite également.
   - *Positif.* Commençons par rappeler le calcul classique de $\mathrm{Tr}(\,{}^tAA)$ dans le cas général où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (à savoir refaire). Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

   $$[\,{}^tAA]_{i,i} = \sum_{j=1}^n [\,{}^tA]_{i,j}[A]_{j,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}a_{j,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

   On en déduit que :

   $$Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^n [{}^tAA]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

   Pour $n=2$, on a donc en particulier :

   $$\langle A, A\rangle = a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 \geq 0$$

- *Défini positif.* Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}({}^t AA) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \underbrace{a_{j,i}^2}_{\geq 0} = 0 \\ \Leftrightarrow \forall i,j \in [\![1,2]\!],\ a_{j,i} = 0 \\ \Leftrightarrow A = 0_{2,2}\end{aligned}$$

Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

2. On a :

$$F = \left\{ a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est donc génératrice de F, et elle est libre car formée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F, de sorte que $\dim(F) = 2$.

3. Quelques rappels pour commencer.

> **Rappel. Orthogonal d'un sous-espace.**
> Si F est un sous-espace d'un espace euclidien E, on définit *l'orthogonal de* F par :
>
> $$F^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$
>
> Rappelons que :
>
> - $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de F, de sorte que :
>
> $$E = F \oplus F^\perp.$$
>
> En particulier, on a $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.
> - Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$, alors :
>
> $$x \in F^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, u_i\rangle = 0 \quad \forall k \in [\![1,p]\!].$$
>
> - La concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$ est une base orthonormée de E.

Tout d'abord, notons que $\dim F^\perp = \dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) - \dim F = 4 - 2 = 2$. On a :

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in F^\perp &\Leftrightarrow \begin{cases}\left\langle \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\rangle = 0\\ \left\langle \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a - d = 0\\ c + b = 0\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$F^\perp = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right).$$

De même, $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $F^\perp$ et libre car formée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $F^\perp$.

4. Commençons par rappeler les différentes méthodes pour calculer le projeté orthogonal sur un sous-espace.

Rappel. Calcul du projeté orthogonal sur un s.e.v. F.

On procèdera différemment selon la situation dans laquelle on se trouve :

- si on dispose (facilement) d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de F, on utilisera la formule suivante :
$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i.$$
- si on dispose d'une base $(u_1, \dots, u_p)$ de F qui n'est pas orthonormée, alors on procèdera comme suit :
  (i) on exprime que $p_F(x) \in F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$:
$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad p_F(x) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$
  (ii) on exprime que $x - p_F(x) \in F^\perp$:
$$\begin{cases} \langle x - p_F(x), u_1 \rangle = 0 \\ \quad \vdots \\ \langle x - p_F(x), u_p \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, u_1 \rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \cdots + \lambda_p \langle u_p, u_1 \rangle \\ \quad \vdots \\ \langle x, u_p \rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_p \rangle + \cdots + \lambda_p \langle u_p, u_p \rangle \end{cases}.$$
  (iii) on résout ce système linéaire pour obtenir $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, et donc $p_F(x)$.
- enfin si $F^\perp$ est de « petite » dimension (en pratique, si $\dim(F^\perp) < \dim(F)$), on préférera calculer le projeté orthogonal sur $F^\perp$, puis utiliser le fait que $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$.

Notons ici que $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, donc on dispose d'une base orthogonale de F. De plus, on a :
$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + (-1)^2 = 2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2.$$
Posons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (e_1, e_2) est donc une base orthonormée de F. On a donc d'après le cours :
$$\begin{aligned} p_F(A) &= \langle A, e_1 \rangle e_1 + \langle A, e_2 \rangle e_2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rappel. Distance à un sous-espace F.

Le minimum $\min\{\|x - y\|, \, y \in F\}$ existe et est atteint en un unique point de F qui est $p_F(x)$. On appelle distance de x à F, notée $d(x, F)$, ce minimum, de sorte que :
$$d(x, F) = \min\{\|x - y\|, \, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|.$$

On a donc ici :
$$\begin{aligned} \min_{B \in F} \|A - B\| = \|A - p_F(A)\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2} = 1. \end{aligned}$$

Exercice 24.25 (★★ - Inégalité de Bessel)

Soit E un espace euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F. On note p_F la projection orthogonale sur F.

Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormée de F, on rappelle que :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

et on a de plus :

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle^2.$$

D'autre part par définition du projeté orthogonal, on a $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ de sorte que ces vecteurs sont orthogonaux. Par le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \underbrace{\|x - p_F(x)\|^2}_{\geq 0} \geq \|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle^2.$$

D'où l'inégalité voulue.

Exercice 24.26 (★★★ - QSP HEC 2018)
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. (a) Justifier que H est un hyperplan de E.
   (b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?
2. On considère le produit scalaire sur E défini par :
$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$
   Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^{\perp}$.

Commençons par quelques rappels sur les formes linéaires et hyperplans.

Rappels. Formes linéaires et hyperplans.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle :

- hyperplan de E tout espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$;
- forme linéaire sur E une application linéaire de E à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Rappelons les résultats principaux sur le lien entre formes linéaires et hyperplans :

- H est un hyperplan de E si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Si $H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ où φ et ψ sont des formes linéaires non nulle sur E, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Pour plus de détails, je vous renvoie au **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans**.

1. (a) Notons $P_3 = (X-1)(X-2)(X-4)$, $P_2 = (X-1)(X-3)(X-4)$ et $P_1 = (X-2)(X-3)(X-4)$.

   Déjà vu ?
   Ces polynômes devraient vous faire penser aux polynômes de Lagrange associés aux réels $1, 2, 3, 4$, même s'ils n'ont pas été normalisés (il faudrait changer le coefficient dominant de P_1 par exemple pour que $P_1(1) = 1$). Cela devrait nous aider d'avoir ça en tête pour la suite de l'exercice.

Montrons que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre. Soient pour cela $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0.$$

On évalue cette relation en $X = 1$. On obtient :

$$a \underbrace{P_1(1)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

De même en évaluant en $X = 2, 3$, on obtient $b = c = 0$. Donc la famille (P_1, P_2, P_3) est libre et $H = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ est de dimension $3 = \dim(E) - 1$. C'est donc un hyperplan de E.

(b) On sait par le cours que H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, mais le cours ne nous dit pas comment trouver cette forme linéaire.

Visiblement, les polynômes (P_1, P_2, P_3) sont liés aux polynômes de Lagrange (il faudrait les renormaliser) associés à $1, 2, 3, 4$. Manque donc le quatrième polynôme $P_4 = (X-1)(X-2)(X-3)$. Tous ces polynômes se caractérisent à l'aide de l'évaluation en $1, 2, 3, 4$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère donc la forme linéaire :

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to \mathbb{R} \\ P & \mapsto P(a) \end{cases}.$$

Choisissons a de sorte que $H = \text{Ker}(\varphi_a)$. On remarque que pour $a = 4$, on a bien $\varphi_4(P_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Donc on a $H \subset \text{Ker}(\varphi)$. Pour montrer l'égalité, on étudie les dimensions. On a par le théorème du rang :

$$4 = \dim \text{Ker}(\varphi_4) + \dim \text{Im}(\varphi_4).$$

Or $\text{Im}(\varphi_4)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, non nul car φ_4 est non nul ($\varphi_4(1) = 1$ par exemple). Donc $\text{Im}(\varphi_4) = \mathbb{R}$ et on a :

$$\dim \text{Ker}(\varphi_4) = \dim(E) - 1.$$

Ainsi $\text{Ker}(\varphi_4)$ est aussi un hyperplan de E (ce qu'on savait avec le **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans** puisque c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle). Par égalité des dimensions et l'inclusion $H \subset \text{Ker}(\varphi_4)$, on peut donc conclure que :

$$H = \text{Ker}(\varphi).$$

Il n'y a pas unicité de la forme linéaire : par exemple $2\varphi_4$ convient aussi puisque $\text{Ker}(2\varphi_4) = \text{Ker}(\varphi_4) = H$.

Remarque. Et on a d'ailleurs montré dans le **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans** que toutes les formes linéaires qui conviennent sont de cette « forme », puisque si $H = Ker(\varphi) = Ker(\psi)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

2. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. La bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent pas de difficulté. Montrons le caractère défini positif. Soit pour cela $P \in E$ tel que :

$$\langle P, P \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 + P(4)^2 = 0.$$

On en déduit que $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$. P admet donc 4 racines distinctes, et est de degré ≤ 3. C'est donc le polynôme nul.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

Commençons par déterminer $H^\perp$. On a :

$$Q \in H^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle P_1, Q \rangle = 0 \\ \langle P_2, Q \rangle = 0 \\ \langle P_3, Q \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(1) = 0 \\ Q(2) = 0 \\ Q(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_4 \text{ divise } Q$$
$$\underset{Q \in \mathbb{R}_3[X]}{\Leftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad Q = \lambda P_4$$

Ainsi on a $H^\perp = \text{Vect}(P_4)$. On dispose donc de la base orthonormée $\left(e_4 = \dfrac{P_4}{\|P_4\|}\right)$ de $H^\perp$. D'où l'expression du projeté orthogonal de $P \in E$ sur $H^\perp$:

$$p_{H^\perp}(P) = \langle P, e_4\rangle e_4 = \frac{\langle P, P_4\rangle}{\|P_4\|^2} P_4.$$

Or on a :

$$\|P_4\|^2 = P_4(4)^2 = 36 \quad \text{et} \quad \langle P, P_4\rangle = 6P(4).$$

Ainsi le projeté orthogonal de $P \in E$ sur $H^\perp$ est :

$$p_{H^\perp}(P) = \frac{6P(4)}{36} P_4 = \frac{P(4)}{6} P_4.$$

Exercice 24.27 (★★)
Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $f : E \to \mathbb{R}[X]$ par $f(P) = -P'' + 2XP' + P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tout $P, Q \in E$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
4. Prouver que $\forall P, Q \in E$, $\langle P', Q'\rangle = \langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle$.
5. En déduire que f est un endomorphisme symétrique de E.

1. Pour tout $P \in E$, on a $\deg(P) \leq n$ et donc :

$$\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P''), \deg(XP'), \deg(P)) \leq n.$$

Donc f est bien à valeur dans E.

Montrons que f est linéaire. Pour tout $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= -(\alpha P + \beta Q)'' + 2X(\alpha P + \beta Q)' + (\alpha P + \beta Q) \\ &= -(\alpha P'' + \beta Q'') + 2X(\alpha P' + \beta Q') + (\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha(-P'' + 2XP' + P) + \beta(-Q'' + 2XQ' + Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme de E.

2. Soit P et $Q \in E$, qu'on supposera non nul (sinon la convergence est évidente). Notons respectivement a_pX^p et b_qX^q les termes dominants de P et Q. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue comme produit de fonctions qui le sont. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est donc généralisée en $+\infty$ et en $-\infty$.

En $+\infty$, on a :

- $t^2P(t)Q(t)e^{-t^2} \sim a_pb_qt^{2+p+q}e^{-t^2} \underset{u=t^2}{=} a_pb_qu^{1+\frac{p+q}{2}}e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0$ par croissance comparées. Ainsi on a $P(t)Q(t)e^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
- $\dfrac{1}{t^2} > 0$ pour tout $t > 0$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. On montre de même la convergence en $-\infty$. D'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Montrons que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   - *Linéarité à gauche.* $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t\\ &= \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t\\ &\quad \text{par linéarité de l'intégrale (les intégrales convergent !)}\\ &= \lambda_1\langle P_1, Q\rangle + \lambda_2\langle P_2, Q\rangle\end{aligned}$$

   - *Symétrie.*

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle.$$

     En particulier, on en déduit que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à droite.

   - *Positivité.* Pour tout $P \in E$

$$\langle P, P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t \geq 0$$

     en tant qu'intégrale d'une fonction positive.

   - *Défini positif.* Soit P tel que $\langle P, P\rangle = 0$. On a :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

     Or $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est **continue** et **positive** sur $\mathbb{R}$. Son intégrale est donc nulle si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad P(t)^2 e^{-t^2} = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\quad P(t) = 0.$$

     P admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Donc $P = 0_E$ et $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est défini positif.

   Ainsi $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

4. Pour tout $P, Q \in E$, on a par linéarité à gauche :

$$\langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle = -\langle P'', Q\rangle + \langle 2XP', Q\rangle. \qquad (*)$$

   Or on a :

$$\langle P'', Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Soit $A < B$. Effectuons une intégration par parties sur le **segment** $[A, B]$.

$$\begin{array}{r|ccc} + & Q(t)e^{-t^2} & & P''(t)\\ & & \searrow & \\ - & \left[Q'(t) - 2tQ(t)\right]e^{-t^2} & \overset{\int}{\longleftarrow} & P'(t)\end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto P'(t)$ et $t \mapsto Q(t)e^{-t^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_A^B P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[P'(t)Q(t)e^{-t^2}\right]_A^B - \int_A^B P'(t)\left[Q'(t)-2tQ(t)\right]e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= P'(B)Q(B)e^{-B^2} - P'(A)Q(A)e^{-A^2} - \int_A^B P'(t)\left[Q'(t)-2tQ(t)\right]e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On obtient lorsque $B \to +\infty$ (tout converge d'après la question 2. et par croissance comparée) :

$$\int_A^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -P'(A)Q(A)e^{-A^2} - \int_A^{+\infty} P'(t)\left[Q'(t)-2tQ(t)\right]e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Et lorsque $A \to -\infty$ (de même, tout converge) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)\left[Q'(t)-2tQ(t)\right]e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

soit encore :

$$\langle P'', Q\rangle = -\langle P', Q'\rangle + \langle 2XP', Q\rangle.$$

D'où en substituant dans $(*)$:

$$\langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle = \langle P', Q'\rangle - \langle 2XP', Q\rangle + \langle 2XP', Q\rangle = \langle P', Q'\rangle.$$

5. Commençons par rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.

> **Rappel. Endomorphisme symétrique.**
> Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est symétrique si :
> $$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Ici on a pour tout $P, Q \in E$:

$$\begin{aligned}\langle f(P), Q\rangle &\overset{4.}{=} \langle P', Q'\rangle + \langle P, Q\rangle \\ &= \langle Q', P'\rangle + \langle Q, P\rangle \quad \text{par sym. du prod. scal.} \\ &\overset{4.}{=} \langle f(Q), P\rangle = \langle P, f(Q)\rangle \quad \text{toujours par sym.}\end{aligned}$$

Donc f est bien un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 24.28 (★★)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^tAA$. Montrer que S est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Soit S une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.
3. **Application**. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

1. Commençons par quelques rappels sur l'application transposée.

Rappel. Application transposée.

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto^t A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire.
- ${}^t({}^tA) = A$.
- ${}^t(AB) =^t B^tA$.
- $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.

En utilisant les propriétés de la transposée, on obtient que S est bien symétrique puisque ${}^tS =^t ({}^tAA) = ({}^tA)^t({}^tA) =^t AA$.

Montrons à présent que les valeurs propres de S sont toutes positives. Soit pour cela λ une valeur propre de S, et $X \neq 0_{n,1}$ un vecteur propre associé. On a :

$$ {}^tAAX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad {}^t(AX)(AX) =^t X^tAAX = \lambda^tXX. $$

D'où en notant $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique :

$$ \|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2 \quad \underset{\|X\|\neq 0}{\Rightarrow} \lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0. $$

Les valeurs propres de S sont donc positives ou nulles.

2. Quelques rappels tout d'abord sur la réduction des endomorphismes et matrices symétriques.

Rappel. Réduction des endomorphismes et matrices symétriques.
Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E.

- Les valeurs propres de f sont réelles.
- Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. En particulier, une famille de vecteurs associés à des valeurs propres distinctes est orthogonale.
- **Théorème spectral.**
  f est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe une **base orthonormée** de E formée de vecteurs propres de f.
- **Traduction matricielle du théorème spectral.**
  Si A est symétrique réelle, alors A est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe P orthogonale et D diagonale telles que :

$$ D = P^{-1}AP = {}^tPAP. $$

Comme S est symétrique réelle, elle diagonalise en base orthonormée, et il existe P orthogonale, et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telles que :

$$ S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP. $$

Notons $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ (existe bien car les λ_i sont positif par hypothèse). On a :

$$ S = PD'^2\,{}^tP = (PD'\,{}^tP)(PD'\,{}^tP) = (PD'\,{}^tP)^2. $$

Posons $A = PD'\,{}^tP$. On a ${}^tA = {}^t(PD'\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^tD'\,{}^tP = PD'\,{}^tP = A$, et donc :

$$ S = A^2 = {}^tAA. $$

D'où le résultat voulu.

3. S étant symétrique réelle, on sait qu'il existe bien une telle matrice A. Procèdons comme à la question 2., en diagonalisant S en base orthonormée.

Commençons par chercher les valeurs propres de S. On a :

$$S - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1. Donc 1 est valeur propre de S et $\dim(E_1(S)) = 2 - 1 = 1$. De plus on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(S) \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0.$$

Donc $E_1(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour obtenir l'autre valeur propre, on peut au choix prendre la trace de S (qui est diagonalisable car symétrique réelle), ou remarquer (comme d'habitude pour ce « type » de matrices) que :

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc 3 est valeur propre de S, et $1 \leq \dim(E_3(S)) \leq 1$ (car on a déjà $\dim(E_1(S)) = 1$), de sorte que $E_3(S) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On a donc une base de vecteurs propres de S, reste à obtenir une base orthonormée de vecteurs propres. Comme S est symétrique réelle, ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qu'on remarque d'ailleurs dans notre situation. Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est orthogonale. Il reste à normaliser les vecteurs pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres de S :

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2.$$

En posant $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(1, 3)$, on a donc que P est orthogonale et que :

$$S = PD\,{}^tP.$$

En posant $D' = \mathrm{diag}(1, \sqrt{3})$ et $A = PD'\,{}^tP$, on a donc :

$$S = {}^tAA.$$

Après calculs, on obtient $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 24.29 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.

Étude d'un endomorphisme

On considère l'application u qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $u(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de u.
   (b) u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
   (c) Montrer que u est diagonalisable. Préciser la dimension de chaque sous-espace propre.
4. (a) Prouver que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$u(P_k) = k(k+1)P_k.$$
   (b) Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, P_k est de degré k.
   (c) Déterminer P_0, P_1 et P_2.

Polynômes de Legendre

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On note $Q_k = (X^2-1)^k$ et L_k la dérivée k-ième de Q_k : $L_k = Q_k^{(k)}$.

5. Montrer que $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son cœfficient dominant.
6. Vérifier que $(X^2-1)Q_k' = 2kXQ_k$ puis en dérivant $(k+1)$ fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que :
$$(X^2-1)L_k'' + 2XL_k' = k(k+1)L_k.$$
7. En déduire que $P_k = \dfrac{k!}{(2k)!}L_k$.

Produit scalaire et orthogonalité

8. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pourra pour cela noter que $u(P) = \dfrac{d}{dX}\left((1-X^2)\dfrac{dP}{dX}\right)$.
10. En déduire que la famille L_k des polynômes de Legendre est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :
$$\deg(u(P)) \leq \max(\deg((X^2-1)P''), \deg(2XP')) = \max(\deg(P'')+2, \deg(P')+1) \leq \deg(P) \leq n.$$
Donc u est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrons que u est linéaire. Soit pour cela $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} u(\alpha P + \beta Q) &= (X^2-1)(\alpha P + \beta Q)'' + 2X(\alpha P+\beta Q)' = (X^2-1)((\alpha P'' + \beta Q'') + 2X(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha\left[(X^2-1)P'' + 2XP'\right] + \beta\left[(X^2-1)Q'' + 2XQ'\right] \end{aligned}$$
Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a :
$$u(1) = 0, \quad u(X) = 2X,$$
et pour tout $2 \leq k \leq n$:
$$\begin{aligned} u(X^k) &= (X^2-1)\left[k(k-1)X^{k-2}\right] + 2X\left[kX^{k-1}\right] = \left[k(k-1)+2k\right]X^k - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2} \end{aligned}$$
La matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

3. (a) A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se trouvent sur sa diagonale. Ainsi on a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u) = \{k(k+1),\, 0 \leq k \leq n\}$.
   (b) u n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ car $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.
   (c) u admet $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace de dimension $n+1$. u est donc diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

4. (a) Soit $0 \leq k \leq n$. Comme nous venons de le dire, le sous-espace propre $E_{k(k+1)}(u)$ est de dimension 1, donc il existe Q_k un polynôme non nul tel que :

$$E_{k(k+1)}(u) = \mathrm{Vect}(Q_k).$$

Si on note α_k son coefficient dominant (qui est non nul car $Q_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$), le polynôme $P_k = \dfrac{1}{\alpha_k} Q_k$ est unitaire et on a :

$$E_{k(k+1)}(u) = \mathrm{Vect}(P_k).$$

D'où l'existence d'un tel polynôme P_k.

Supposons que l'on ait R_k un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$u(R_k) = k(k+1)R_k.$$

Alors on aurait $R_k \in E_{k(k+1)}(u) = \mathrm{Vect}(P_k)$, de sorte qu'il existerait $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$R_k = \alpha_k P_k.$$

Les polynômes R_k et P_k étant unitaire, on aurait alors $\alpha_k = 1$, et donc $R_k = P_k$. D'où l'unicité d'un tel polynôme P_k.

(b) Soit toujours $0 \leq k \leq n$ fixé. Écrivons le polynôme P_k sous la forme (en rappelant qu'il est unitaire !) :

$$P_k = X^d + R$$

où $d = \deg(P_k)$ et R polynôme de degré $< d$. On a par linéarité de u (et en utilisant les calculs effectués à la question 2.) :

$$u(P_k) = d(d+1)X^d \underbrace{-d(d-1)X^{d-2} + u(R)}_{\text{poly. de deg. } <d}.$$

Ainsi le coefficient dominant de $u(P_k)$ est égal à $d(d+1)$. Or on a :

$$u(P_k) = k(k+1)P_k = k(k+1)X^d + \underbrace{k(k+1)R}_{\text{poly. de deg. } <d}.$$

En identifiant les coefficients dominants, on obtient donc (la fonction $x \mapsto x(x+1)$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc injective) :

$$d(d+1) = k(k+1) \quad \Rightarrow \quad d = k.$$

Ainsi le polynôme P_k est bien de degré k.

(c) On a vu que $u(1) = 0 = 0(0+1) \times 1$, et donc par unicité $P_0 = 1$. De même, on a $u(X) = 2X = 1(1+1)X$, et donc $P_1 = X$.

On cherche $P_2 = X^2 + bX + c$ satisfaisant $u(P_2) = 6P_2$, ce qui se réécrit (en utilisant la linéarité de u) :

$$6X^2 + 6bX + 6c = u(X^2) + bu(X) + cu(1) = 6X^2 - 2 + 2bX.$$

D'où le système :

$$\begin{cases} 6b = 2b \\ 6c = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ainsi on a $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

5. On a $\deg(Q_k) = 2k$, d'où en dérivant k fois, $\deg(L_k) = 2k - k = k$.

   De plus, Q_k est unitaire de terme dominant X^{2k}. En dérivant k fois, le terme dominant de L_k est donc :
   $$(2k)(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!}X^k.$$
   Ainsi le coefficient dominant de L_k est $\dfrac{(2k)!}{k!}$.

6. On a :
   $$(X^2-1)Q_k' = (X^2-1)\left[k(2X)(X^2-1)^{k-1}\right] = 2kX(X^2-1)^k = 2kXQ_k.$$
   Notons $R = X^2 - 1$ et $S = 2kX$, de sorte que l'égalité précédente se réécrit :
   $$RQ_k' = SQ_k.$$
   On va dériver cette expression $(k+1)$ fois à l'aide de la formule de Leibniz :
   $$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} R^{(i)} Q_k^{(k+2-i)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} S^{(i)} Q_k^{(k+1-i)}$$
   Or on a $R^{(i)} = 0$ pour tout $i \geq 3$ et $S^{(i)} = 0$ pour tout $i \geq 2$. Ce qui donne donc :
   $$\binom{k+1}{0}R^{(0)}Q_k^{(k+2)} + \binom{k+1}{1}R^{(1)}Q_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2}R^{(2)}Q_k^{(k)} = \binom{k+1}{0}S^{(0)}Q_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}S^{(1)}Q_k^{(k)}$$
   Soit en substituant :
   $$(X^2-1)Q_k^{(k+2)} + (k+1)2XQ_k^{(k+1)} + \frac{(k+1)k}{2}2Q_k^{(k)} = 2kXQ_k^{(k+1)} + (k+1)2kQ_k^{(k)}$$
   D'où :
   $$(X^2-1)L_k'' + 2(k+1)XL_k' + k(k+1)L_k = 2kXL_k' + 2k(k+1)L_k$$
   On obtient donc bien l'identité voulue :
   $$(X^2-1)L_k'' + 2XL_k' = k(k+1)L_k.$$

7. L'égalité précédente se réécrit :
   $$u(L_k) = k(k+1)L_k.$$
   Comme de plus $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $L_k \in E_{k(k+1)}(u) = \mathrm{Vect}(P_k)$. Il existe donc $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$L_k = \alpha_k P_k.$$
   En identifiant les coefficients dominants, on a $\dfrac{(2k)!}{k!} = \alpha_k$, et donc $P_k = \dfrac{k!}{(2k)!}L_k$.

8. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   - *Linéarité à gauche.* $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned}\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^{1} P_1(t)Q(t)\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 \langle P_1, Q\rangle + \lambda_2\langle P_2, Q\rangle\end{aligned}$$

- *Symétrie.*
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle.$$
En particulier, on en déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à droite.
- *Positif.*
$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\mathrm{d}t \geq 0$$
en tant qu'intégrale d'une fonction positive.
- *Défini positif.* Soit P tel que $\langle P, P\rangle = 0$. On a :
$$0 = \int_{-1}^{1} P(t)^2\mathrm{d}t$$
La fonction $t \mapsto P(t)^2$ étant **continue** et **positive** sur $[-1, 1]$, son intégrale est nulle si et seulement si :
$$\forall t \in [-1, 1], \quad P(t)^2 = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1, 1], \quad P(t) = 0.$$
P admet donc une **infinité de racines** (tous les réels entre -1 et 1). C'est donc le polynôme nul. Donc $P = 0$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est défini positif.

Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

9. Pour montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$, on va revenir à la définition, en notant que $u(P) = \left[(X^2-1)P'\right]'$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

   Soit donc $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :
$$\langle u(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)P'(t)\right]' Q(t)\,\mathrm{d}t$$
   On effectue une intégration par parties.
$$\begin{array}{c|ccc} + & Q(t) & & \left[(t^2-1)P'(t)\right]' \\ & & \searrow & \\ - & Q'(t) & \overset{\int}{\leftarrow} & (t^2-1)P'(t) \end{array}$$
   Les fonctions $t \mapsto Q(t)$ et $t \mapsto (t^2-1)P'(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 1]$. Par intégration par parties, on obtient :
$$\begin{aligned}\langle u(P), Q\rangle &= \left[Q(t)(t^2-1)P'(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q'(t)(t^2-1)P'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1} Q'(t)(t^2-1)P'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
   En inversant les rôles de P et de Q dans la formule précédente, on obtient :
$$\langle P, u(Q)\rangle = \langle u(Q), P\rangle = -\int_{-1}^{1} P'(t)(t^2-1)Q'(t)\,\mathrm{d}t = \langle u(P), Q\rangle.$$
   Donc u est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

10. $(L_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes. Comme u est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$, on en déduit par le cours que $(L_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est donc une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 24.30 (★★)
Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(1) $\forall \lambda \in \text{Spec}(f)$, $|\lambda| \leq 1$, | (2) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit λ une valeur propre de f, et x un vecteur propre associé. On a par hypothèse :

$$\|f(x)\| \leq \|x\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| \leq \|x\| \quad \underset{x \neq 0_E}{\Rightarrow} \quad |\lambda| \leq 1.$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $\text{Spec}(f) \subset [-1, 1]$. Puisque f est symétrique, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, décomposition de x dans notre base orthonormée. Rappelons alors quelques résultats de cours :

Rappel. Formules dans une base orthonormée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien rapporté à une **base orthonormée** $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

- Pour tout x de E, on a :

$$x = \langle e_1, x \rangle e_1 + \ldots + \langle e_n, x \rangle e_n.$$

Autrement dit, on a $M_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$.

- Pour tout $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$ de E, on a :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \langle x, e_1 \rangle \langle y, e_1 \rangle + \cdots + \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle.$$

- Pour tout $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ de E, on a :

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \langle x, e_1 \rangle^2 + \cdots + \langle x, e_n \rangle^2.$$

On a donc ici :

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

et :

$$\|f(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$$

D'où le résultat voulu.

Exercice 24.31 (★★★)

Trouver toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\quad X\,{}^tXX = I_n$.

En multipliant par ${}^tX$ à gauche, on obtient :

$${}^tXX\,{}^tXX = {}^tX.$$

Ainsi ${}^tX$ est symétrique, et donc X aussi. Et l'équation de l'énoncé se réécrit alors :

$$X^3 = I_n$$

Comme X est symétrique, X est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. De plus, si λ est valeur propre de X, alors $\lambda^3 = 1$, et λ est une racine cubique de l'unité. Or 1 est la seule racine cubique de l'unité dans $\mathbb{R}$ (qui rappelons le sont les $\exp\left(\frac{2ik\pi}{3}\right)$ avec $k = 0, 1, 2$). Ainsi $\text{Sp}(X) = \{1\}$ et X étant diagonalisable, on a donc $X = I_n$. Réciproquement, $X = I_n$ est bien solution de l'équation.

Exercice 24.32 (★★★ - QSP HEC 2009)

Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Monter qu'il existe un endomorphisme symétrique ϕ tel que $f = \phi^2$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.

1. Comme f est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes, mais toutes strictement positives par hypothèse) tel que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}^2.$$

Soit ϕ l'unique endomorphisme de E tel que $M_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$. Un tel endomorphisme existe et est unique car l'application

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \phi \in \mathscr{L}(E) \mapsto M_{\mathscr{B}}(\phi) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Puisque cette matrice est symétrique dans une base orthonormée, on a que ϕ est un endomorphisme symétrique, à valeurs propres strictement positives, et tel que $M_{\mathscr{B}}(\phi^2) = M_{\mathscr{B}}(\phi)^2 = M_{\mathscr{B}}(f)$. Ainsi on a bien $\phi^2 = f$ (par injectivité de $\Phi_{\mathscr{B}}$).

2. L'inclusion $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f + g)$ est immédiate puisque si $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$, alors on a $f(x) = g(x) = 0_E$, et donc $(f + g)(x) = 0_E$.

   On étudie l'inclusion réciproque : soit donc $x \in \text{Ker}(f + g)$. On a :

$$(f + g)(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f(x) = -g(x).$$

   Utilisons la question 1., et prenons ϕ et ψ des endomorphismes symétriques tels que $\phi^2 = f$ et $\psi^2 = g$. On a alors :

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \phi^2(x) \rangle = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle = \|\phi(x)\|^2$$

   car ϕ est symétrique. De même on a $\langle x, g(x) \rangle = \|\psi(x)\|^2$. D'où avec la première inégalité :

$$\|\phi(x)\|^2 = \langle x, f(x) \rangle = -\langle x, g(x) \rangle = -\|\psi(x)\|^2.$$

   Ainsi on a $\phi(x) = \psi(x) = 0_E$, et donc $f(x) = \phi^2(x) = 0_E$ et $g(x) = \psi^2(x) = 0_E$. Par suite x appartient bien à $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$. D'où $\text{Ker}(f + g) \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$, et donc l'égalité entre ces deux ensembles.

Exercice 24.33 (★)

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1. Déterminer la matrice M canoniquement associée à q.
2. Justifier que M est diagonalisable dans une base orthonormale.

3. Déterminer le signe de q.
4. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M.
5. Retrouver le signe de q par une autre méthode.
