TD24

Révisions d'algèbre

Polynômes

Exercice 24.1 (★★ - Division euclidienne)

Dans les cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de A par B.

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$.
2. $A = X^n - 4X + 1$, $B = (X-1)^2$.

Exercice 24.2 (★★ - Équations polynomiales)

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X^2) = 4P(X)$.
2. Déterminer tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$

Exercice 24.3 (★★ - Multiplicité d'une racine)

1. Déterminer a et b pour que $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 pour racine double. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X-1)^2$?
2. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit le polynôme $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$. Calculer $P(X) - P'(X)$, puis en déduire que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 24.4 (★★★ - QSP ESCP 2016)

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement monotone.
2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$, alors $P = X$.

Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 24.5 (★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{(x,y,z,t),\ x+y+z-t = 0\}$.
2. $G = \mathrm{Vect}((1,1,2),(0,1,0),(2,-3,4))$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1)\}$.
4. $I = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 24.6 (★★)

Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et en donner une base, sa dimension ainsi qu'un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 24.7 (★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,-1,1,-1))$;
2. $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$, $u_4 = (1,1,1,1)$, et $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, $G = \mathrm{Vect}(u_3,u_4)$;
3. (★) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X]\ ;\ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$;
4. (★) $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f \in E\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = f(x)\}$ et $F = \{f \in E\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\}$.

Exercice 24.8 (★★)
Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$f_1\,:\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto(x-y,2z,x-z)\in\mathbb{R}^3$;

$f_2\,:\,P\in\mathbb{R}_2[X]\mapsto 2XP-(X^2-1)P'\in\mathbb{R}_2[X]$;

$f_3\,:\,P\in\mathbb{R}_3[X]\mapsto P+P'\in\mathbb{R}_3[X]$;

$f_4\,:\,P\in\mathbb{R}_2[X]\mapsto P(X+1)-P(X)\in\mathbb{R}_2[X]$;

$f_5\,:\,M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\mapsto AM\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$;

$f_6\,:\,M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\mapsto AM-MA\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

Exercice 24.9 (★★)
Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F=\{(x,y,z),\ x+2y+z=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}(u)$ où $u=(1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.
2. On note p le projecteur sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $F\oplus G$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
   (c) Sans calcul supplémentaire, donner la matrice dans la base canonique de la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 24.10 (★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2)\subset\mathrm{Im}(f)$.
2. (★) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)\Leftrightarrow E=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 24.11 (★★ - Sous-espaces vectoriels stables par la dérivation)
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P)=P'$.

1. Montrer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par φ.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, non réduit au vecteur nul et stable par φ.
   (a) Soit $P\in F$ un polynôme de degré d. Montrer que $\mathbb{R}_d[X]\subset F$.
   (b) On note $p=\max\{\deg(P),\ P\in F\}$. Montrer que $F=\mathbb{R}_p[X]$.

Exercice 24.12 (★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et soit $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^3\neq 0$ et $f^4=0$.

1. Montrer qu'il existe $x\in E$ tel que $(x,f(x),f^2(x),f^3(x))$ soit une base de E.
2. En déduire le rang de f.

Exercice 24.13 (★★★★ - Oral ESCP 2012)
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n>1$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Pour tous $i,j\in\mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j}=1$ si $i=j$ et $\delta_{i,j}=0$ sinon.
Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1,\cdots,a_n)$ une famille de nombres réels distincts.

1. (a) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $L_i(a_j)=\delta_{i,j}$.
   (b) Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Soit $\pi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$.
   (a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de π.
   (c) On note $F = \left\{ Q\prod_{i=1}^{n}(X-a_i),\ Q \in \mathbb{R}[X] \right\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.
   (d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$, $P \mapsto (P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.
   (a) Montrer que ε est un isomorphisme.
   (b) Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \cdots, a_n)$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathscr{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tels que $a \leq a_1 < \cdots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1, \cdots, a_n)$.
   (a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par
   $$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - P(t) - K\prod_{i=1}^{n}(t - a_i).$$
   Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.
   (b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\varsigma \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :
   $$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}|x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$

Diagonalisation

Exercice 24.14 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, en déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.15 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)

Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. (★) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.16 (★★ - Extrait de EML 2013)
Soit $n \geq 2$ un entier. Soit L un élément non nul de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On pose $A = CL$ et $a = \text{Tr}(A)$.

1. Déterminer les coefficients de A à l'aide des coefficients de C et L.
2. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Montrer que $LC = (a)$, puis $A^2 = aA$.
4. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. On suppose $a \neq 0$. Calculer AC. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
6. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 24.17 (★★)
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \geq 2)$ défini par $[f(P)](X) = P(aX + b)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique. En déduire les valeurs propres de f.
2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$, alors f est diagonalisable.
3. Si $a = 1$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 24.18 (★★)
Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 24.19 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)
On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieurs ou égal à 2. On note e_0, e_1, e_2 les polynômes de E définis par $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$. On rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division euclidienne par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P) \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Déterminer $f(e_0), f(e_1), f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$.
   (c) Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\text{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
   $$\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3Id).$$
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.20 (★★ - Extrait d'Edhec 2006)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'il existe deux complexes λ_1, λ_2 distincts tels que $(f - \lambda_1 Id) \circ (f - \lambda_2 Id) = 0$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}((f - \lambda_1 Id) - (f - \lambda_2 Id)) = Id$.
2. En déduire que $\mathbb{C}^n = \text{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.21 (★★ - Racines carrées d'une matrice diagonalisable (EML 2009))

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
   (a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (c) Justifier que f est diagonalisable.
   Montrer que, pour toute base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.
   On appelle racine carrée de A toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   (a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   (b) Donner un exemple de racine carrée de A (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).
   (c) Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
   En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
   (d) Établir qu'il existe exactement 2^n racines carrées de A.

Exercice 24.22 (★★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable possédant p valeurs propres distinctes.

1. Montrer que A possède un polynôme annulateur P de degré p, et que tout polynôme annulateur non nul de A est de degré supérieur ou égal à p.
2. Montrer que la dimension de $\text{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^k)$ vaut $k+1$ si $k < p$ et p sinon.

Exercice 24.23 (★★★★ - Polynômes minimaux (Oral ESCP 2016))

1. Soit un entier $n \geq 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de M.
   (a) Justifier que $\mathscr{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul.
   (b) Vérifier que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
   (c) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall Q \in \mathscr{A}$, $PQ \in \mathscr{A}$.
   (d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathscr{A}$ de degré minimal. Soit $K \in \mathscr{A}$ un polynôme unitaire de degré minimal.
   En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de $\mathscr{A}$. En déduire que
   $$\mathscr{A} = \{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$
   Un tel polynôme s'appelle polynôme minimal de M.
2. Exemples.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le polynôme minimal de λI_n, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
   (b) Soit P la matrice d'un projecteur p distinct de 0 et Id. Déterminer le polynôme minimal de P.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme minimal K. Montrer que l'ensemble des racines de K est égal à l'ensemble des valeurs propres de M.

Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques

Exercice 24.24 (★)

Pour $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB)$. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en déterminer une base et la dimension.
3. Déterminer une base de $F^\perp$.
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur F et en déduire $\min\limits_{B \in F} \|A - B\|$.

Exercice 24.25 (★★ - Inégalité de Bessel)

Soit E un espace euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. On note p_F la projection orthogonale sur F.

Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Exercice 24.26 (★★★ - QSP HEC 2018)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. (a) Justifier que H est un hyperplan de E.
   (b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?
2. On considère le produit scalaire sur E défini par :
$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$
   Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^\perp$.

Exercice 24.27 (★★)

Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $f : E \to \mathbb{R}[X]$ par $f(P) = -P'' + 2XP' + P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tout $P, Q \in E$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
4. Prouver que $\forall P, Q \in E$, $\langle P', Q'\rangle = \langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle$.
5. En déduire que f est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 24.28 (★★)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^tAA$. Montrer que S est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Soit S une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.
3. **Application**. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

Exercice 24.29 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.

Étude d'un endomorphisme

On considère l'application u qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $u(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de u.
   (b) u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
   (c) Montrer que u est diagonalisable. Préciser la dimension de chaque sous-espace propre.
4. (a) Prouver que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$u(P_k) = k(k+1)P_k.$$
   (b) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est de degré k.
   (c) Déterminer P_0, P_1 et P_2.

Polynômes de Legendre

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On note $Q_k = (X^2-1)^k$ et L_k la dérivée k-ième de Q_k : $L_k = Q_k^{(k)}$.

5. Montrer que $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son cœfficient dominant.
6. Vérifier que $(X^2-1)Q_k' = 2kXQ_k$ puis en dérivant $(k+1)$ fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que :
   $$(X^2-1)L_k'' + 2XL_k' = k(k+1)L_k.$$
7. En déduire que $P_k = \dfrac{k!}{(2k)!}L_k$.

Produit scalaire et orthogonalité

8. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On pourra pour cela noter que $u(P) = \dfrac{d}{dX}\left((1-X^2)\dfrac{dP}{dX}\right)$.
10. En déduire que la famille L_k des polynômes de Legendre est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 24.30 (★★)
Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(1) $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, $|\lambda| \leq 1$, | (2) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 24.31 (★★★)
Trouver toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $X\,{}^tXX = I_n$.

Exercice 24.32 (★★★ - QSP HEC 2009)
Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Monter qu'il existe un endomorphisme symétrique ϕ tel que $f = \phi^2$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 24.33 (★)

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1. Déterminer la matrice M canoniquement associée à q.
2. Justifier que M est diagonalisable dans une base orthonormale.
3. Déterminer le signe de q.
4. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M.
5. Retrouver le signe de q par une autre méthode.
