TD24

Révisions d'algèbre

Polynômes

Exercice 24.1 (★★ - Division euclidienne)

Dans les cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de P par Q.

1. $P = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $Q = X^2 + 2X + 3$.
2. $P = X^n - 4X + 1$, $Q = (X-1)^2$.

Exercice 24.2 (★★ - Équations polynomiales)

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X^2) = 4P(X)$.
2. Déterminer tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$

Exercice 24.3 (★★ - Racines réelles d'un polynôme)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

1. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^3$.
2. Quelles sont les racines réelles de P_n'' ?
3. (★) Montrer que P_n admet au plus 4 racines réelles distinctes.

Exercice 24.4 (★★★ - QSP ESCP 2016)

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement monotone.
2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$, alors $P = X$.

Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 24.5 (★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{(x,y,z,t),\ x+y+z-t = 0\}$.
2. $G = \mathrm{Vect}((1,1,2),(0,1,0),(2,-3,4))$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1)\}$.
4. $I = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 24.6 (★)

Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et en donner une base, sa dimension ainsi qu'un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 24.7 (★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}(1, -1, 1, -1)$;
2. $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$;
3. (★) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$;

Exercice 24.8 (★)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y, 2z, x - z).$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 24.9 (★★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z),\ x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. On note p le projecteur sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
   (c) Sans calcul supplémentaire, donner la matrice dans la base canonique de la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 24.10 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Exercice 24.11 (★★ - Sous-espaces vectoriels stables par la dérivation)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par φ.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, non réduit au vecteur nul et stable par φ.
   (a) Soit $P \in F$ un polynôme de degré d. Montrer que $\mathbb{R}_d[X] \subset F$.
   (b) On note $p = \max\{\deg(P),\ P \in F\}$. Montrer que $F = \mathbb{R}_p[X]$.

Exercice 24.12 (★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ soit une base de E.

b) En déduire le rang de f.

Exercice 24.13 (★★★★ - Oral ESCP 2012)

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n > 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \cdots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts.

1. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
   (b) Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Soit $\pi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\pi(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$.
   (a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de π.
   (c) On note $F = \left\{Q\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i),\ Q \in \mathbb{R}[X]\right\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}[X]$.
   (d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$, $P \mapsto (P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.
   (a) Montrer que ε est un isomorphisme.
   (b) Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \cdots, a_n)$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathscr{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tels que $a \leq a_1 < \cdots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1, \cdots, a_n)$.
   (a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par
   $$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - P(t) - K\prod_{i=1}^{n}(t - a_i).$$
   Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.
   (b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\varsigma \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :
   $$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}|x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$

Diagonalisation

Exercice 24.14 (★)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ? f est-elle bijective ?
3. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
4. Montrer que f est diagonalisable. Déterminer des matrices P inversible, D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.
5. Déterminer A^n.

Exercice 24.15 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, en déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.16 (★★ - Extrait d'Edhec 2013)

Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. (★) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.17 (★★ - Extrait de EML 2013)

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit L un élément non nul de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On pose $A = CL$ et $a = \mathrm{Tr}(A)$.

1. Déterminer les coefficients de A à l'aide des coefficients de C et L.

2. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

3. Montrer que $LC = (a)$, puis $A^2 = aA$.

4. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

6. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 24.18 (★★)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \geq 2$) défini par $[f(P)](X) = P(aX + b)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique. En déduire les valeurs propres de f.

2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$, alors f est diagonalisable.

3. Si $a = 1$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 24.19 (★★)

Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 24.20 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieurs ou égal à 2. On note e_0, e_1, e_2 les polynômes de E définis par $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$. On rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division euclidienne par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P) \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. (a) Déterminer $f(e_0), f(e_1), f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3Id).$$
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.21 (★★ - Extrait d'Edhec 2006)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'il existe deux complexes λ_1, λ_2 distincts tels que $(f - \lambda_1 Id) \circ (f - \lambda_2 Id) = 0$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}((f - \lambda_1 Id) - (f - \lambda_2 Id)) = Id$.
2. En déduire que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.22 (★★ - Racines carrées d'une matrice diagonalisable (EML 2009))

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
   (a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (c) Justifier que f est diagonalisable.
   Montrer que, pour toute base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.
   On appelle racine carrée de A toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   (a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   (b) Donner un exemple de racine carrée de A (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).
   (c) Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
   En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
   (d) Établir qu'il existe exactement 2^n racines carrées de A.

Exercice 24.23 (★★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable possédant p valeurs propres distinctes.

1. Montrer que A possède un polynôme annulateur P de degré p, et que tout polynôme annulateur non nul de A est de degré supérieur ou égal à p.
2. Montrer que la dimension de $\mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^k)$ vaut $k+1$ si $k < p$ et p sinon.

Exercice 24.24 (★★★★ - Polynômes minimaux (Oral ESCP 2016))

1. Soit un entier $n \geq 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de M.
   (a) Justifier que $\mathscr{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul.
   (b) Vérifier que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
   (c) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall Q \in \mathscr{A}$, $PQ \in \mathscr{A}$.

(d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathscr{A}$ de degré minimal. Soit $K \in \mathscr{A}$ un polynôme unitaire de degré minimal.
En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de $\mathscr{A}$. En déduire que
$$\mathscr{A} = \{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$
Un tel polynôme s'appelle polynôme minimal de M.

2. Exemples.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le polynôme minimal de λI_n, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
   (b) Soit P la matrice d'un projecteur p distinct de 0 et Id. Déterminer le polynôme minimal de P.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme minimal K. Montrer que l'ensemble des racines de K est égal à l'ensemble des valeurs propres de M.

Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques

Exercice 24.25 (★)

Pour $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB)$. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en déterminer une base et la dimension.
3. Déterminer une base de $F^\perp$.
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur F et en déduire $\min\limits_{B \in F} \|A - B\|$.

Exercice 24.26 (★★ - Inégalité de Bessel)

Soit E un espace euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. On note p_F la projection orthogonale sur F.

Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Exercice 24.27 (★★)

Pour tout couple (P, Q) de vecteurs de l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$, on note :
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

   On cherche à déterminer le minimum de $f(a,b,c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$ lorsque $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que f admet un minimum atteint en un unique point (a_0, b_0, c_0) que l'on déterminera. On ne cherchera pas à calculer ce minimum.

Exercice 24.28 (★★★ - QSP HEC 2018)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. (a) Justifier que H est un hyperplan de E.
   (b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?
2. On considère le produit scalaire sur E défini par :
$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$
Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^\perp$.

Exercice 24.29 (★★★★ - Oral ESCP 2016)

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$T_0 = 1,\ T_1 = X \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant que l'on déterminera. Montrer que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
2. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\mathrm{d}\theta$.
   (a) Montrer que pour tous réels a et b, on a :
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$
   (b) Calculer $I_{p,q}$.
3. Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est convergente. On la note $\langle P, Q \rangle$.
Montrer que $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\langle X^n, T_n \rangle$.

6. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de :

$$d = \inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left(\sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0))^2}{\sqrt{1-t^2}}} \right).$$

Exercice 24.30 (★★ - Edhec 2019)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ e_2, \ \dots, \ e_n)$ une base orthonormale de E. Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E.

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

1. (a) Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i.$$

   (b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.

2. (a) Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question 1.(a) est effectivement un endomorphisme de E.

   (b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle.$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.

On dit que u est un endomorphisme normale quand on a l'égalité :

$$u \circ u^\star = u^\star \circ u.$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4. (a) Montrer que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star)$.

5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

   (a) Montrer que E_λ est stable par $u^\star$.

(b) Établir que $(u^\star)^\star = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Exercice 24.31 (★★)

Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $f : E \to \mathbb{R}[X]$ par :

$$f(P) = -P'' + 2XP' + P.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tout $P, Q \in E$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
4. Prouver que $\forall P, Q \in E$, $\langle P', Q'\rangle = \langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle$.
5. En déduire que f est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 24.32 (★★)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^tAA$. Montrer que S est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Soit S une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.
3. **Application**. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

Exercice 24.33 (★★)

Soit n un entier naturel fixé.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.

A. *Étude d'un endomorphisme*

On considère l'application u qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de u.
   (b) u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
   (c) Montrer que u est diagonalisable. Préciser la dimension de chaque sous-espace propre.
4. (a) Prouver que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$u(P_k) = k(k+1)P_k.$$

(b) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est de degré k.

(c) Déterminer P_0, P_1 et P_2.

B. *Polynômes de Legendre*

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On note $Q_k = (X^2 - 1)^k$ et L_k la dérivée k-ième de Q_k : $L_k = Q_k^{(k)}$.

1. Montrer que $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son cœfficient dominant.
2. Vérifier que $(X^2 - 1)Q_k' = 2kXQ_k$ puis en dérivant $(k + 1)$ fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que :
$$(X^2 - 1)L_k'' + 2XL_k' = k(k + 1)L_k.$$
3. En déduire que $P_k = \dfrac{k!}{(2k)!} L_k$.

C. *Produit scalaire et orthogonalité*

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pourra pour cela noter que $u(P) = \dfrac{d}{dX}\left((1 - X^2)\dfrac{dP}{dX}\right)$.
3. En déduire que la famille L_k des polynômes de Legendre est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

Exercice 24.34 (★★)

Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(1) $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, $|\lambda| \leq 1$,

(2) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 24.35 (★★★)

Trouver toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$X\,{}^tXX = I_n.$$

Exercice 24.36 (★★★ - QSP HEC 2009)

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien E, dont toutes les valeurs propres ont positivesou nulles.

1. Monter qu'il existe un endomorphisme symétrique ϕ tel que $f = \phi^2$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f + g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 24.37 (★)
Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1. Déterminer la matrice M canoniquement associée à q.
2. Justifier que M est diagonalisable dans une base orthonormale.
3. Déterminer le signe de q.
4. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M.
5. Retrouver le signe de q par une autre méthode.