TD3

Principes généraux de calculs en probabilité

Calculs de probabilités

Exercice 3.1 (★)

Roger est un joueur de tennis de très haut niveau, Éric un joueur du dimanche. On vous propose de jouer trois parties contre les deux, alternativement, et de vous donner un prix si vous gagnez deux parties consécutives. Avez-vous intérêt à jouer Roger, Éric puis Roger, ou Éric, Roger puis Éric ?

Exercice 3.2 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p, avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au n-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
3. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?

   Indication. On discutera pour cela du rang d'apparition du premier face.

Exercice 3.3 (★★)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : si la boule blanche est tirée, le jeu s'arrête, et si une boule noire est tirée, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, autant de boules noires que l'urne contient de boules.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement « le n-ème tirage amène pour la première fois la boule blanche ».

1. Calculer la probabilité de A_1 et de A_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.

Exercice 3.4 (★★★ - QSP ESCP 2018)

On lance $n \geq 2$ fois une pièce équilibrée, et on considère les évènements :

- A : « on obtient au plus une fois pile »,
- B : « les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques ».

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3.5 (★★★★ - Oral ESCP 2015)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N et on extrait ces N boules une à une et sans remise. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, le numéro i est dit bien placé si ce numéro apparait lors du i-ème tirage. On considère les évènements :

- B_i : « le numéro i est bien placé ».
- $E_{N,k}$: « au cours de l'expérience, exactement k numéros sont bien placés ».

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. Pour $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq N$, calculer la probabilité de l'évènement :

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_j} = \text{« les numéros } i_1, i_2, \ldots, i_j \text{ sont bien placés ».}$$

On admet que $P(E_{N,0}) = 1 - \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_j})$.

3. En déduire que : $P(E_{N,0}) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}$.
4. Montrer la relation : $P(E_{N,k}) = \frac{1}{k!} P(E_{N-k,0})$.
5. Pour k fixé, montrer que la suite $(P(E_{N,k}))_{N \geq 0}$ est convergente. On note p_k sa limite. Montrer que la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$, et reconnaitre la loi correspondante.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_{2p+1} \leq S_{2p+3} \leq \frac{1}{e} \leq S_{2p+2} \leq S_{2p}.$$

En déduire, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, que :

$$\sum_{j=0}^{n} |P(E_{N,j}) - p_j| \leq \frac{e}{(N+1-n)!}.$$

Formules de probilités totales et de Bayes

Exercice 3.6 (★)

On dispose de trois urnes contenant des boules blanches et noires : $\mathscr{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 noires, $\mathscr{U}_2$ contient 4 blanches et 2 noires, $\mathscr{U}_3$ contient 6 blanches et 1 noire.

1. On choisit une urne au hasard et on tire une boule.
   (a) Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
   (b) On tire une boule blanche. Quelle est la probabilité que le tirage se soit effectué dans l'urne $\mathscr{U}_1$?
2. On effectue à présent trois tirages successifs selon le protocole suivant :
   - on tire une boule dans $\mathscr{U}_1$, on note la couleur, on remet la boule dans $\mathscr{U}_2$,
   - on tire une boule dans $\mathscr{U}_2$, on note la couleur, on remet la boule dans $\mathscr{U}_3$,
   - on tire une boule dans $\mathscr{U}_3$ et on note la couleur.

   Déterminer la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur.

Exercice 3.7 (★)

On dispose de n sacs numérotés de 1 à n. Chaque sac contient $n+1$ jetons. Dans le k-ième sac se trouvent k jetons gagnants, les autres étant perdants. Un joueur choisi au hasard un sac et y pioche un jeton.

1. Quelle est la probabilité que le jeton soit gagnant ?
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, sachant que le jeton tiré est gagnant, quelle est la probabilité que le tirage ait eu lieu dans le sac numéro k ?

Exercice 3.8 (★★)

1. Jacques propose à Jules le jeu suivant : tirer 5 cartes parmi 52. Si l'as de trèfle est dans ces 5 cartes, Jules gagne. Quelle est la probabilité que Jules gagne ?

2. Jacques décide de tricher et retire k cartes au hasard, avec $1 \leq k \leq 46$. Quelle est la probabilité que Jules gagne ?

3. Jules perd. Quelle est la probabilité que Jacques ait enlevé l'as de trèfle ?

Exercice 3.9 (★★)

Un signal binaire (de valeur 1 ou -1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal a une probabilité p $(0 < p < 1)$ d'être inversé. On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité pour que le signal transmis soit identique au signal initial. Montrer que :

$$p_n = p + (1 - 2p)p_{n-1}.$$

En déduire une expression générale de p_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.10 (★★)

On dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant une boule blanche. On suppose que l'on dispose également d'un stock infini de boules noires.
On lance la pièce jusqu'à obtenir Face. Pour tout $n \geq 1$, on note F_n l'évènement « On obtient Face pour la première fois au n-ème lancé ».
S'il a fallu n lancers pour obtenir Face ($n \in \mathbb{N}^*$), on rajoute $n! - 1$ boules noires dans l'urne.
On tire alors une boule dans cette urne.

1. Montrer que la famille d'évènements $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système presque complet d'évènements.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir la boule blanche.

3. On obtient une boule noire. Quelle est la probabilité d'avoir fait 10 lancers de la pièce ?

Exercice 3.11 (★★)

Une puce se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n elle est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n + 1$, soit elle y reste avec une probabilité de $2/3$, soit elle saute sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets. Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), la puce se trouve en A.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$ les événements A_n (resp. B_n, C_n) « la puce se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n », et les probabilités $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $6M - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 3.12 (★★)

On lance deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité p_2. On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce ; plus généralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0, 1[$.

1. Quelle est la probabilité de lancer la pièce 1 au n-ième lancer ?

2. Quelle est la probabilité, notée r_n, d'obtenir pile au n-ième lancer ?
3. Calculer $L = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.
4. Dans cette question on suppose $p_1 = 1/3$ et $p_2 = 1/6$. Écrire en langage Scilab l'expression d'une fonction permettant de calculer la valeur d'un rang n_0 à partir duquel :
$$|r_n - L| \leq 10^{-6}.$$

Exercice 3.13 (★★★ - QSP HEC 2013)

On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite de manière indépendante et on s'intéresse à l'évènement E_n : « au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas ». On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n la probabilité de E_n.

Trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}, et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 0$.

Exercice 3.14 (★★★ - QSP HEC 2009)

Un enfant a dans chacune de ses deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. À chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec une probabilité p, sa poche de gauche pour en prendre un.

1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

Exercice 3.15 (★★★★ - Oral HEC)

On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 2 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$, 1 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères.

A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n-ième génération. Montrer que:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}.$$
3. Étudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers $-2 + \sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.
