TD4

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 4.1 (★)

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$;

$B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x-y+z=0 \text{ et } x-y+z-t=0\}$,

$C = \left\{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1\right\}$

$D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monotone}\}$;

$$E = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } P = aX(X-1)+bX^2+c(X-1)+d\}$

$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(X+1) = 2P(X) \text{ et } P(3)=0\}$

$$H = \left\{\begin{pmatrix}2a+b+c & 0 & 0\\ 0 & a+2b+c & a-b\end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

$I = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite réelle telle que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$

$J = \{\text{suites réelles bornées}\}$

$K = \{\text{matrices nilpotentes}\}$

- Montrons que I est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles :
  - la suite nulle u appartient bien à I car pour tout $n \geq 0$, on a :
  $$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0 - 4\times 0 + 4 \times 0 = 0.$$
  - Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites de I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que :
  $$w = \lambda u + \mu v = (\lambda u_n + \mu v_n) \in I.$$
  Pour tout $n \geq 0$, on a :
  $$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \qquad \text{car } u, v \in I\\ &= \lambda(4u_{n+1} - 4u_n) + \mu(4v_{n+1} - 4v_n)\\ &= 4(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - 4(\lambda u_n + \mu v_n)\\ &= 4w_{n+1} - 4w_n.\end{aligned}$$
  Ainsi on a bien $w \in I$.

On peut donc conclure que I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour en déterminer une base, on va commencer par remarquer que I est l'ensemble des suites satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On sait comment obtenir le terme général d'une suite u satisfaisant une telle relation : on cherche les racines de l'équation caractéristique, qui est $r^2 - 4r + 4 = 0$. On a une racine double $r = 2$. D'où l'existence de deux constantes λ et μ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + n\mu)2^n = \lambda 2^n + \mu n 2^n.$$

Posons les suites $a = (2^n)$ et $b = (n2^n)$. Avec ce qui précède, on a donc que :

$$I = \{\lambda a + \mu b,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(a, b).$$

La famille (a, b) est génératrice donc, et libre. En effet, les suites a et b ne sont pas colinéaires. Sinon, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = \lambda b$, ce qui donnerait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n = \lambda n 2^n$$

ce qui est clairement faux. (a, b) est donc une base de I, qui est donc de dimension 2.

- Montrons que J est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
  - La suite nulle est bien bornée, donc appartient à J.
  - Soient $u, v \in J$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $w = \lambda u + \mu v$ appartient à J. Pour cela, notons que puisque $u, v \in J$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

    $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq A \quad \text{et} \quad |v_n| \leq B.$$

    Par inégalité triangulaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

    $$|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda||u_n| + |\mu||v_n| \leq |\lambda|A + |\mu|B.$$

    Ainsi on a bien montré que $w \in J$.

  J est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

  J n'est cependant pas de dimension finie. En effet, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(N)} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{position } N}, 0 \dots)$. Cette suite est bien bornée. Et on peut montrer (je vous laisse le faire) que toute famille de la forme $(u^{(0)}, \dots, u^{(N)})$ est libre de cardinal $N + 1$. Il existe donc des familles libres de cardinal aussi grand que l'on veut dans J. Ce qui prouve que J n'est pas de dimension finie.

- Tentons de montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  - La matrice nulle est bien nilpotente (d'indice de nilpotence 1), donc appartient à H.
  - Mais H ne va pas être stable par combinaison linéaire : la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas nilpotente en général. Par exemple, on a :

    $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Les matrices de gauches sont bien nilpotentes car triangulaires strictes. Alors que celle de droite ne l'ai pas, par exemple parce qu'elle est inversible.

Ainsi H n'est pas un sous-espace vectoriel des matrices.

Exercice.

On vient de montrer que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas forcément une matrice nilpotente. Démontrer que c'est cependant bien le cas si on suppose en plus que ces matrices commutent.

Exercice 4.2 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $G = Vect((3,7,0),(5,0,-7))$. Montrer que $F = G$.

Exercice 4.3 (★★★★ - Inspiré de QSP HEC 2007)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :
$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
En déduire que E n'est pas réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts (c'est à dire distincts de E).
2. Plus généralement, montrer que E n'est pas réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts

1. Commençons donc par montrer que :
$$F \cup G \text{ est un sev} \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
L'implication $\Leftarrow$ est évidente. Montrons la réciproque. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $F \cup G$ est un sev et que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. On a :
   - $F \not\subset G$ donc il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$;
   - $G \not\subset F$ donc il existe $y \in G$ tel que $y \notin F$.

   Mais alors $x \in F \subset F \cup G$ et $y \in G \subset F \cup G$, et $F \cup G$ est un sev. Donc $x + y$ appartient à $F \cup G$. On a alors deux cas possibles :
   - soit $x + y \in F$, mais alors $y = \underbrace{(x+y)}_{\in F} - \underbrace{x}_{\in F}$ appartient à F. Ce qui est faux.
   - soit $x + y \in G$, et de même $x = \underbrace{(x+y)}_{\in G} - \underbrace{y}_{\in G}$ appartient à G. Ce qui est faux.

   D'où une contradiction et le résultat.

   Il en résulte en particulier que E ne peut pas être réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts : en effet, sinon on aurait $E = F \cup G$ qui serait un sev. Donc d'après le résultat précédent, $E = F$ ou $E = G$ ce qui contredit F et G stricts.
2. Traitons du cas général maintenant (plus difficile, on s'inspire du cas précédent). Supposons qu'il existe $V_1, \ldots, V_p$ des sous-espaces vectoriels stricts tels que :
$$E = V_1 \cup \cdots \cup V_p.$$

> Quitte à enlever V_1, on peut supposer que $V_1 \nsubseteq V_2 \cup \cdots \cup V_p$ (sinon on travaille directement avec $V_2 \cup \ldots V_p$). Alors :
>
> - il existe $x \in V_1$ tel que $x \notin V_2 \cup \cdots \cup V_p$.
> - il existe $y \in V_2 \cup \cdots \cup V_p$ tel que $y \notin V_1$.
>
> Considérons le vecteur $z_j = y + ix$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. On a $z_j \notin V_1$ car sinon $y = z_j - \lambda x \in V_1$ ce qui est faux. De plus on a $z_j \in E = V_1 \cup \cdots \cup V_p$, donc il existe $i_j \in [\![2, p]\!]$ tel que $z_j \in V_{i_j}$. On a donc $2 \leq i_1, \ldots, i_p \leq p$, donc il existe $1 \leq r < s \leq p$ tels que $i_s = i_r$. Mais alors z_r, z_s appartiennent au même sous-espace V_{i_s}, et donc :
>
> $$z_r - z_s = y + rx - (y + sx) = \underbrace{(r - s)}_{\neq 0} x \in V_{i_s}.$$
>
> Ce qui est absurde car $x \notin V_2 \cup \cdots \cup V_p$.
>
> Ainsi on a bien que E n'est pas une réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts.

Familles de vecteurs

Exercice 4.4 (★)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées?

a) $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$;

b) $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 2))$;

c) $((1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 1))$;

d) $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_2 : x \mapsto |x-1|$, $f_3 : x \mapsto |x+1|$;

e) $(3, X^2 + 1, X^5 - 3X^2 + 2)$;

f) $(X^k (X - 1)^{n-k})_{k \in [\![0,n]\!]}$.

Exercice 4.5 (★)

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels de l'**Exercice 4.1**.

Exercice 4.6 (★)

Montrer que $\mathscr{B} = ((1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Calculer les coordonnées de (a, b, c) dans cette base. En déduire $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.7 (★★)

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ et la dimension de F.
3. Soit $P = 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$. Montrer que P appartient à F, et déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 4.8 (★★ - Polynômes de Lagrange et matrices de Vandermonde - ✍)

Soient $a_0, \ldots, a_n$ $n + 1$ réels distincts deux à deux. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} = \frac{X - a_0}{a_i - a_0} \times \cdots \times \frac{X - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \times \frac{X - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \times \cdots \times \frac{X - a_n}{a_i - a_n}.$$

1. Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, calculer $L_i(a_j)$ (*on pourra distinguer les cas $i=j$ et $i \neq j$*).
2. Montrer que $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de P.
4. Notons $\mathscr{C} = (1, X, \dots, X^n)$. Écrire la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$.
5. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Rang

Exercice 4.9 (★)

À l'aide de la commande `xarrows` (dont on pourra consulter l'aide), représenter sur `Scilab` les familles de vecteurs suivantes (on peut faire pivoter la représentation graphique à l'aide du clic droit) :

a) $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,3,0)$, $x_3 = (3,2,2)$;

b) $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (-1,1,-1)$, $x_3 = (0,1,1)$, $x_4 = (1,0,2)$;

c) $x_1 = (2,1,-3)$, $x_2 = (2,3,-1)$, $x_3 = (-1,2,4)$, $x_4 = (1,1,1)$.

Parmi ces trois familles, déterminer graphiquement lesquelles sont libres, génératrices, leur rang. Vérifier vos observations à l'aide de `Scilab`.

Exercice 4.10 (★)

Déterminer le rang des familles suivantes :

a) $x_1 = (1,0,2)$, $x_2 = (-1,2,-1)$, $x_3 = (2,3,0)$, $x_4 = (1,0,-1)$, $x_5 = (2,1,-1)$;

b) $x_1 = (1,1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,1,0)$, $x_3 = (2,0,1,1)$, $x_4 = (0,-2,1,-1)$;

c) $P_1 = X^2 + X - 3$, $P_2 = X^2 - X - 3$, $P_3 = 2X^2 - X - 6$.

Exercice 4.11 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1,0,2)$, $v = (1,1,2)$, $w = (1,2,2)$, $t = (2,2,2)$.
Montrer que (u,v,w,t) est générateur de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.12 (★★)

Montrer que la matrice carrée d'ordre n, $A = (\sin(i+j))$ est de rang au plus 2.

> Soit $j \in [\![1,n]\!]$, notons $C_j(A)$ la j-ème colonne de A. On a par les formules trigonométriques :
>
> $$C_j(A) = \begin{pmatrix} \sin(1+j) \\ \vdots \\ \sin(n+j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(1)\cos(j) + \sin(j)\cos(1) \\ \vdots \\ \sin(n)\cos(j) + \sin(j)\cos(n) \end{pmatrix} = \cos(j)S + \sin(j)S$$

où $C = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$. Ainsi on a que pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$C_j(A) \in \mathrm{Vect}(C, S).$$

On obtient donc $\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) \subset \mathrm{Vect}(C, S)$, de sorte que :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))) \leq \dim(\mathrm{Vect}(C, S)) = 2$$

car les vecteurs C et S ne sont pas colinéaires. D'où le résultat voulu.

Exercice 4.13 (★★ - Matrices de rang 1 - ✍)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne non nulle $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice ligne non nulle $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$.
2. Montrer que $M^2 = Tr(M)M$.

Somme de sous-espaces

Exercice 4.14 (★)
Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P - (X+1)P' = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, et en donner une base et la dimension.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4.15 (★★)
Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

a) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = Vect(1, -1, 1, -1)$;

b) $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = Vect(u_1, u_2)$, $G = Vect(u_3, u_4)$;

c) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$;

d) $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E,\ f \text{ paire}\}$, $G = \{g \in E,\ g \text{ impaire}\}$.

Exercice 4.16 (★★ - ✍)
Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit $u \notin H$. Montrer que :

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(u).$$

Exercice 4.17 (★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille 3 - ✍)
Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est dite symétrique lorsque ${}^tM = M$ et antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$. On note $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont en somme directe (c'est à dire $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \{0_E\}$).

c) Déterminer une base et la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

d) Conclure que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4.18 (★★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille n - ✍)

Montrer que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. En déduire que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 4.19 (★★★)

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ deux à deux distincts dans $[0,1]$. On pose :

$$F = \{f \in E,\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ f(a_i) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis déterminer un supplémentaire de F dans E.

> Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ deux à deux distincts dans $[0,1]$. On pose :
>
> $$F = \{f \in E,\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ f(a_i) = 0\}.$$
>
> Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E :
>
> - La fonction nulle $f = 0$ appartient à f car $f(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.
> - Soient $f, g \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in F$. On a pour tout $i \in [\![1,p]\!]$:
>
> $$(\lambda f + \mu g)(a_i) = \lambda f(a_i) + \mu g(a_i) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0.$$
>
>   Ainsi $\lambda f + \mu g$ appartient bien à F.
>
> Donc F est un sous-espace vectoriel de E.
>
> Essayons de deviner un supplémentaire G de F. Il nous faudrait pour cela des vecteurs n'appartenant pas à F, c'est à dire des fonctions continues telles qu'il existe $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $f(a_i) \neq 0$. Pour simplifier les choses, on pourrait chercher une fonction f_i telle que $f_i(a_i) = 1$ et telle que $f_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$. On est naturellement amené à choisir f_i la i-ème fonction polynomiale de Lagrange associée aux réels (a_i).
>
> Posons donc $G = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$ et montrons que $E = F \oplus G$. Comme E n'est pas de dimension finie, on va montrer que $\begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$.
>
> - Soit $f \in F \cap G$. Alors en particulier $f \in G$ et il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tel que :
>
> $$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_p f_p. \qquad (*)$$
>
>   Puisque $f \in F$, on a que $f(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Mais alors en évaluant dans $(*)$, on obtient $0 = \alpha_i$ (puisque $f_i(a_j) = \delta_{i,j}$). Ainsi $f = 0$ et on a bien $F \cap G = \{0_E\}$ (on vient de démontrer l'inclusion $\subset$, l'autre inclusion étant immédiate puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel).

- Soit à présent $h \in E$ quelconque. On a :

$$h = \underbrace{(h - \sum_{i=1}^{p} h(a_i) f_i)}_{=:f} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} h(a_i) f_i}_{=:g}.$$

Par définition, on a bien $g \in G$ car g est combinaison linéaire des f_i. D'autre part, on a $f \in F$ car pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$f(a_j) = h(a_j) - \sum_{i=1}^{p} h(a_i) \underbrace{f_i(a_j)}_{=\delta_{i,j}} = h(a_j) - h(a_j) = 0.$$

Ainsi on a bien montré que $E = F + G$.

On peut donc conclure que $E = F \oplus G$.

Exercice 4.20 (★★★ - QSP HEC 2013)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égaux à 3. On pose :

$$F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\},\ G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$
$$\text{et } H = \{P \in E,\ P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

On a :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow X(X-1)(X-2) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = X(X-1)(X-2)Q \end{aligned}$$

Or $\deg(P) \leq 3$, donc on a $\deg(Q) \leq 0$, et donc :

$$P \in F \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ P = \alpha X(X-1)(X-2)$$

Ainsi on a $F = \text{Vect}(X(X-1)(X-2))$. Comme $X(X-1)(X-2) \neq 0$, $(X(X-1)(X-2))$ est une famille libre et génératrice de F, et donc une base de F.

De même, on montre que $G = \text{Vect}((X-1)(X-2)(X-3))$, et que $((X-1)(X-2)(X-3))$ est une base de G.

Soit enfin $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$P \in H \Leftrightarrow aX^3 + bX^2 + cX + d = -aX^2 + bX^2 - cX + d \Leftrightarrow a = c = 0$$

Ainsi on a $H = \{bX^2 + d,\ b, d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^2, 1)$. La famille $(X^2, 1)$ est génératrice de H, et libre car **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de H.

Pour montrer que $E = F \oplus G \oplus H$, on va montrer que $\mathscr{B} = (X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2)(X-3), X^2, 1)$ est une base de E. On a déjà que $Card(\mathscr{B}) = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. Il nous reste donc à montrer que cette famille est libre. Soit pour cela $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$aX(X-1)(X-2) + b(X-1)(X-2)(X-3) + cX^2 + d = 0$$

Une méthode consisterait à tout développer et à identifier les coefficients en X^k. Ici on peut plus simplement évaluer en $X = 0, 1, 2, 3$. On obtient :

$$\begin{cases} -6b + d = 0 \\ c + d = 0 \\ 4c + d = 0 \\ 6a + 9c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6b + d = 0 & \\ c = 0 & (3) - (2) \\ d = 0 & 4(2) - (3) \\ 6a + 9c + d = 0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\mathscr{B}$ est libre. C'est donc une base de E, et on a bien que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 4.21 (★★★★ - Formule de Grassmann - ✍)

Montrer que si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ est aussi de dimension finie, et qu'on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Montrons la formule de Grassmann : si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ est aussi de dimension finie, et qu'on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

$F \cap G$ est un espace vectoriel de dimension finie, car sous-espace vectoriel de F par exemple. On considère $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F \cap G$.

- C'est en particulier une famille libre de vecteurs de F, qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ de F.
- C'est aussi une famille libre de vecteurs de G, qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_s)$ de G.

Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$ est une base de $F + G$:

- $\mathscr{B}$ est génératrice : soit $z \in F + G$, alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que :

  $$z = x + y.$$

  Comme $x \in F$, il existe $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_r$ tels que

  $$x = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + b_1 f_1 + \dots b_r f_r.$$

  De même, $y \in G$, donc il existe $c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_s$ tels que

  $$y = c_1 e_1 + \dots + c_p e_p + d_1 g_1 + \dots d_s g_s.$$

  Et donc on a :

  $$z = (a_1 + c_1)e_1 + \dots + (a_p + c_p)e_p + b_1 f_1 + \dots + b_r f_r + d_1 g_1 + \dots + d_s g_s.$$

  Donc la famille $\mathscr{B}$ est génératrice, et donc $F + G$ est de dimension finie.
- Montrons que $\mathscr{B}$ est libre : soient $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s$ des scalaires. Supposons que :

  $$0 = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + b_1 f_1 + \dots + b_r f_r + c_1 g_1 + \dots + c_s g_s. \qquad (*)$$

Alors on a :

$$\underbrace{a_1e_1+\cdots+a_pe_p+b_1f_1+\cdots+b_rf_r}_{\in F}=-\underbrace{(c_1g_1+\cdots+c_sg_s)}_{=:g\in G}.$$

Donc $g\in F\cap G$ et il existe donc $d_1,\ldots,d_p$ tels que :

$$d_1e_1+\cdots+d_pe_p=g=c_1g_1+\cdots+c_sg_s$$

Ainsi on a

$$d_1e_1+\cdots+d_pe_p-c_1g_1-\cdots-c_sg_s=0_E$$

Or la famille $(e_1,\ldots,e_p,g_1,\ldots,g_s)$ est une base de G, et donc en particulier une famille libre. Il en résulte que $d_1=\cdots=d_p=c_1=\cdots=c_s=0$, et donc que $g=0$. En reprenant l'égalité $(*)$, on en déduit que :

$$0=a_1e_1+\cdots+a_pe_p+b_1f_1+\cdots+b_rf_r$$

Or $(e_1,\ldots,e_p,f_1,\ldots,f_r)$ est une base de F, donc en particulier une famille libre. On a donc $a_1=\cdots=a_p=b_1=\cdots=b_s=0$. D'où finalement le résultat.

On peut donc conclure que $\mathscr{B}$ est une base de $F+G$ et que :

$$\dim(F+G)=p+r+s=\underbrace{(p+r)}_{=\dim(F)}+\underbrace{(p+s)}_{=\dim(G)}-\underbrace{p}_{=\dim(F\cap G)}.$$