TD4

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 4.1 (★)

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + 3y + z = 0\}$;

$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - y + z = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$,

$C = \left\{f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1\right\}$

$D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monotone}\}$;

$E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } P = aX(X - 1) + bX^2 + c(X - 1) + d\}$

$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(X + 1) = 2P(X) \text{ et } P(3) = 0\}$

$H = \left\{\begin{pmatrix} 2a + b + c & 0 & 0 \\ 0 & a + 2b + c & a - b \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

$I = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite réelle telle que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$

$J = \{\text{suites réelles bornées}\}$

$K = \{\text{matrices nilpotentes}\}$

Exercice 4.2 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ et $G = Vect((3, 7, 0), (5, 0, -7))$. Montrer que $F = G$.

Exercice 4.3 (★★★★ - Inspiré de QSP HEC 2007)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

   En déduire que E n'est pas réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts (c'est à dire distincts de E).

2. Plus généralement, montrer que E n'est pas réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts

---

Familles de vecteurs

Exercice 4.4 (★)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées?

a) $((1,1,0),(0,1,1))$;

b) $((1,1,0),(1,0,1),(2,1,2))$;

c) $((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1))$;

d) $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_2 : x \mapsto |x-1|$, $f_3 : x \mapsto |x+1|$;

e) $(3, X^2+1, X^5-3X^2+2)$;

f) $(X^k(X-1)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Exercice 4.5 (★)
Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels de l'**Exercice 4.1**.

Exercice 4.6 (★)
Montrer que $\mathscr{B} = ((1,1,1),(2,1,1),(2,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Calculer les coordonnées de (a,b,c) dans cette base. En déduire $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.7 (★★)

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ et la dimension de F.
3. Soit $P = 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$. Montrer que P appartient à F, et déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 4.8 (★★ - Polynômes de Lagrange et matrices de Vandermonde - ✍)
Soient $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on pose

$$L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j} = \frac{X-a_0}{a_i-a_0} \times \cdots \times \frac{X-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}} \times \frac{X-a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}} \times \cdots \times \frac{X-a_n}{a_i-a_n}.$$

1. Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, calculer $L_i(a_j)$ (*on pourra distinguer les cas $i=j$ et $i\neq j$*).
2. Montrer que $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de P.
4. Notons $\mathscr{C} = (1, X, \dots, X^n)$. Écrire la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$.
5. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Rang

Exercice 4.9 (★)
À l'aide de la commande `xarrows` (dont on pourra consulter l'aide), représenter sur `Scilab` les familles de vecteurs suivantes (on peut faire pivoter la représentation graphique à l'aide du clic droit) :

a) $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,3,0)$, $x_3 = (3,2,2)$;

b) $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (-1, 1, -1)$, $x_3 = (0, 1, 1)$, $x_4 = (1, 0, 2)$;

c) $x_1 = (2, 1, -3)$, $x_2 = (2, 3, -1)$, $x_3 = (-1, 2, 4)$, $x_4 = (1, 1, 1)$.

Parmi ces trois familles, déterminer graphiquement lesquelles sont libres, génératrices, leur rang. Vérifier vos observations à l'aide de `Scilab`.

Exercice 4.10 (★)

Déterminer le rang des familles suivantes :

a) $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (-1, 2, -1)$, $x_3 = (2, 3, 0)$; $x_4 = (1, 0, -1)$, $x_5 = (2, 1, -1)$;

b) $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, -2, 1, -1)$;

c) $P_1 = X^2 + X - 3$, $P_2 = X^2 - X - 3$, $P_3 = 2X^2 - X - 6$.

Exercice 4.11 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, 2, 2)$, $t = (2, 2, 2)$.
Montrer que (u, v, w, t) est générateur de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.12 (★★)

Montrer que la matrice carrée d'ordre n, $A = (\sin(i + j))$ est de rang au plus 2.

Exercice 4.13 (★★ - Matrices de rang 1 - ✍)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne non nulle $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice ligne non nulle $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$.
2. Montrer que $M^2 = Tr(M)M$.

Somme de sous-espaces

Exercice 4.14 (★)

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P - (X + 1)P' = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, et en donner une base et la dimension.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4.15 (★★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

a) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ :\ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = Vect(1, -1, 1, -1)$;

b) $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = Vect(u_1, u_2)$, $G = Vect(u_3, u_4)$;

c) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X]\ ;\ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$;

d) $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E,\ f \text{ paire}\}$, $G = \{g \in E,\ g \text{ impaire}\}$.

Exercice 4.16 (★★ - ✍)

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit $u \notin H$. Montrer que :

$$E = H \oplus \text{Vect}(u).$$

Exercice 4.17 (★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille 3 - ✍)

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est dite symétrique lorsque ${}^tM = M$ et antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$. On note $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont en somme directe (c'est à dire $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \{0_E\}$).

c) Déterminer une base et la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

d) Conclure que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4.18 (★★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille n - ✍)

Montrer que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. En déduire que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 4.19 (★★★)

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ deux à deux distincts dans $[0,1]$. On pose :

$$F = \{f \in E, \forall i \in [\![1,p]\!],\ f(a_i) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 4.20 (★★★ - QSP HEC 2013)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égaux à 3. On pose :

$$F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\},\ G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$

$$\text{et } H = \{P \in E,\ P(X) = P(-X)\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 4.21 (★★★★ - Formule de Grassmann - ✍)

Montrer que si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ est aussi de dimension finie, et qu'on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$
