TD5

Variables aléatoires discrètes

Loi d'une variable discrète, espérance et variance

Exercice 5.1 (★)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une variable aléatoire.
2. Montrer que X possède une espérance et que $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. X admet-elle une variance ?

Exercice 5.2 (★★ - Propriétés des variables indicatrices - ✍)

1. Montrer que si A, B sont deux évènements, alors

$$\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A,\ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B,\ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

2. Démontrer que $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

Exercice 5.3 (★★)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons dans cette urne, toutes les poignées (y compris la poignée vide) étant équiprobables, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « le jeton i est dans la poignée tirée » et $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$.

a) Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien réalisent l'événement A_i ? En déduire la loi de Y_i.

b) Exprimer X en fonction des Y_i, et en déduire $E(X)$.

Exercice 5.4 (★)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour $\alpha \in [-1; 1]$, la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance, et majorer $|E(Y)|$.
2. Montrer que si X admet une espérance, il en est de même de $Y = \ln(X)$.

Exercice 5.5 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, et soit $\alpha > 0$. On pose $Y = \dfrac{\alpha^X}{2^n}$. Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Exercice 5.6 (★★)

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées avec les entiers supérieurs à 1. Il ne peut tenter la $n+1$-ième hauteur que s'il a franchi la précédente (et donc s'il a franchi toutes les précédentes). On suppose que la probabilité de succès au n-ième saut (donc sachant qu'il a réussi ses $n-1$ premiers sauts) est $p_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement « le sauteur a réussi ses k premiers sauts ».

a) Montrer que le sauteur fini presque sûrement par échouer.

b) On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

(i) Déterminer la loi de X.

(ii) Montrer que X possède une espérance, et la calculer.

Exercice 5.7 (★★ - ✍)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

1. Pour tout entier k, donner une relation liant $P(X=k), P(X>k)$ et $P(X>k-1)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $nP(X>n) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)$.
4. En déduire que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

Exercice 5.8 (★★ - Loi de Pascal et loi binomiale négative - ✍)

On considère un processus binomial de paramètre $p \in]0,1[$, c'est à dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p ou à un échec avec probabilité $q = 1-p$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$. On admettra que si $x \in]-1,1[$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ converge et sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1. On note X_r le rang d'apparition du r-ème succès.
   (a) Que dire de X_1 ?
   (b) Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?
   (c) Montrer que pour tout $k \in V$, $P(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$.
   On dit que X_r suit la *loi de Pascal de paramètre* (r,p).
2. (a) Montrer que $E(X_r)$ existe et vaut $\dfrac{r}{p}$.
   (b) Montrer que $E(X_r(X_r+1))$ et la calculer. En déduire que X_r admet une variance qui vaut $\dfrac{rq}{p^2}$.
3. On note Y_r la variable aléatoire donnant le nombre d'échecs précédant le r-ème succès.
   (a) Quelle relation a-t-on entre X_r et Y_r ?
   (b) En déduire la loi de Y_r, son espérance et sa variance.
   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le coefficient binomial généralisé :
   $$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$
   Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k+r-1}{k} = (-1)^k \binom{-r}{k}.$$
   En déduire que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$
   On dit que Y_r suit la *loi binomiale négative de paramètre* (r,p).

1. (a) X_1 est le rang du premier succès dans une répétitions d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, avec probabilité p de succès pour chaque épreuve. Donc X_1 suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

   (b) Pour obtenir r succès, il faut effectuer au moins r épreuves indépendantes, le r-ème succès pouvant survenir à n'importe quel rang $k \geq r$. Ainsi, on a $V = \{r, r+1, \dots\} = [\![r, +\infty[\![$.

   (c) L'évènement $[X_r = k]$ est donc celui d'obtenir le r-ème succès exactement au rang k. On a donc nécessairement obtenu :

   - un succès au rang k, ce qui survient avec probabilité p ;
   - $r-1$ succès parmi les $k-1$ premiers lancers. Cela correspond à $r-1$ succès lors de $k-1$ épreuves de Bernoulli indépendantes, ce qui relève d'une loi binomiale, et donc qui survient avec probabilité $\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{(k-1)-(r-1)}$.

   Ainsi on obtient que pour tout $k \geq r$:

$$P(X_r = k) = p\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{(k-1)-(r-1)} = \binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}.$$

2. (a) $E(X_r)$ existe si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geq r} kP(X_r = k)$ converge absolument, donc converge car cette série est à termes positif. Or on a :

$$kP(X_r = k) = k\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r} = r\binom{k}{r}p^r q^{k-r}$$

   et la série $\displaystyle\sum_{k\geq r}\binom{k}{r}q^{k-r}$ converge d'après l'énoncé car $|q| < 1$. On peut donc conclure que $E(X_r)$ existe et vaut :

$$E(X_r) = rp^r\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}q^{k-r} = \frac{rp^r}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p}.$$

   (b) Par le théorème de transfert, $E(X_r(X_r+1))$ existe si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geq r} k(k+1)P(X_r = k)$ converge absolument, donc converge car cette série est à termes positif. Or on a :

$$kP(X_r = k) = k(k+1)\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r} = r(r+1)\binom{k+1}{r+1}p^r q^{k-r}$$

   et la série $\displaystyle\sum_{k\geq r}\binom{k+1}{r+1}q^{(k+1)-(r+1)}$ converge d'après l'énoncé car $|q| < 1$. On peut donc conclure que $E(X_r(X_r+1))$ existe et vaut :

$$E(X_r(X_r+1)) = r(r+1)p^r\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k+1}{r+1}q^{(k+1)-(r+1)} = \frac{r(r+1)p^r}{(1-q)^{r+2}} = \frac{r(r+1)}{p^2}.$$

   Par linéarité de l'espérance, $X_r^2 = X_r(X_r+1) - X_r$ admet une espérance qui vaut :

$$E(X_r^2) = E(X_r(X_r+1)) - E(X_r) = \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p}.$$

   Par le formule de Huygens, on peut donc conclure que $V(X_r)$ existe et vaut :

$$V(X_r) = E(X_r^2) - E(X_r)^2 = \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{r^2 + r - rp - r^2}{p^2} = \frac{rq}{p^2}.$$

3. (a) X_r correspond au rang du r-ème succès. Il y a donc eu pendant ces X_r lancers, r succès et $X_r - r$ échecs. D'où $Y_r = X_r - r$.

(b) Puisque $X_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$, on a $Y_r(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(Y_r = k) = P(X_r = k + r) = \binom{(k+r)-1}{r-1} p^r q^{(k+r)-r} = \binom{(k+r)-1}{r-1} p^r q^k.$$

Par linéarité de l'espérance, $E(Y_r)$ existe et vaut :

$$E(Y_r) = E(X_r - r) = E(X_r) - r = \frac{r}{p} - r.$$

Par propriété de la variance, $V(Y_r)$ existe et vaut :

$$V(Y_r) = V(X_r - r) = V(X_r) = \frac{rq}{p^2}.$$

(c) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{k+r-1}{k} = \frac{(k+r-1)(k+r-2)\dots(k+r-1-k+1)}{k!} = \frac{(k+r-1)(k+r-2)\dots(r}{k!}$$

et

$$\binom{-r}{k} = \frac{(-r)(-r-1)\dots(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{r(r+1)\dots(r+k-1)}{k!}.$$

D'où l'égalité demandée.
On en déduit que :

$$P(Y_r = k) = \binom{(k+r)-1}{r-1} p^r q^k = (-1)^k \binom{-r}{k} p^r q^k = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$

Exercice 5.9 (★★★★ - QSP HEC 2016)
Soit X une variable aléatoire discrète admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et telle que $\begin{cases} E(X) = \alpha \\ E(X^2) = E(X^4) = 1 \end{cases}$.

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Déterminer la loi de X.

1. Nous savons que $V(X) \geq 0$, d'où par la formule de Huygens :

$$E(X^2) - E(X)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \in [-1, 1].$$

2. Toujours par la formule de Huygens, on a :

$$V(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 1 - 1 = 0.$$

Donc X^2 est une variable certaine, constante presque sûrement égale à son espérance $E(X^2) = 1$. On en déduit que X ne peut prendre que les valeurs 1 et -1. On obtient alors en calculant l'espérance de X :

$$\alpha = E(X) = P(X = 1) - P(X = -1) = P(X = 1) - (1 - P(X = 1)) = 2P(X = 1) - 1.$$

Ainsi, on a $P(X = 1) = \dfrac{\alpha + 1}{2}$, et donc $P(X = -1) = \dfrac{1 - \alpha}{2}$.

Lois usuelles

Exercice 5.10 (★)
Soit $n > 2$. On dispose dans une urne de n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite de k tirages avec remise de boules de cette urne. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de fois où on a obtenu une boule portant un numéro inférieur ou égal à i lors des k premiers tirages.

Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance. En particulier, que valent $E(X_n)$ et $V(X_n)$? Pourquoi était-ce prévisible ?

Exercice 5.11 (★★)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Y = \lfloor \frac{X+1}{2} \rfloor$. Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre $q = p(2-p)$. En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 5.12 (★★ - ✍)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. On suppose que X suit une loi géométrique.

   Montrer que :

$$\forall n, h \in \mathbb{N}^*, \quad P_{[X>n]}(X > n+h) = P(X > h). \qquad (*)$$

   On dit que la loi géométrique est *sans mémoire*.

2. Réciproquement, on suppose que la condition $(*)$ est vérifiée.
   (a) Montrer que la suite $(P(X > n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = P(X > 1)$.
   (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 5.13 (★★★ - QSP HEC)
Soit $n > 3$. n personnes jettent simultanément une pièce équilibrée. Une personne gagne si elle obtient le contraire de toutes les autres. On note X le nombre de parties nécessaire à l'obtention d'un vainqueur. Déterminer la loi de X, et en déduire que X admet une variance et une espérance, que l'on déterminera.

X correspond au rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli (avec succès si l'une des personne obtient le contraire de toutes les autres, échec sinon) identiques et indépendantes. Donc X suit une loi géométrique de paramètre $P(A)$ où A est l'évènement « une des personne obtient le contraire de toutes les autres ».

Reste donc à calculer $P(A)$. On introduit pour cela les évènements P_i : « la i-ème personne obtient pile ». A est réalisée si et seulement si l'une des personnes obtient pile et toutes les autres faces, ou l'inverse, et cela pour n'importe quelle des personnes. Ce qui se traduit en langage ensembliste :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\left[(P_1 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap \overline{P_i} \cap P_{i+1} \cap \dots P_n) \bigcup (\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_{i-1}} \cap P_i \cap \overline{P_{i+1}} \cap \dots \overline{P_n}) \right]}_{\text{évènement « la } i\text{-ème personne gagne »}}.$$

Par incompatibilités de tous ces évènements, on en déduit que :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left(P_1 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap \overline{P_i} \cap P_{i+1} \cap \dots P_n\right) + P\left(\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_{i-1}} \cap P_i \cap \overline{P_{i+1}} \cap \dots \overline{P_n}\right).$$

Par indépendance à présent des évènements P_j (qui sont tous de probabilité $\frac{1}{2}$), on obtient :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, X suit une loi $\mathscr{G}(\frac{n}{2^{n-1}})$.

Espérance totale

Exercice 5.14 (★)
Un joueur dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une pièce de monnaie dont la probabilité d'apparition de pile à chaque lancer est p (où $p \in]0,1[$). Le joueur lance le dé puis lance la pièce autant de fois que le nombre apparu sur le dé. Soit X le nombre de pile obtenus.

a) Calculer l'espérance de X sachant que le dé a donné le nombre k (où $k \in [\![1,6]\!]$).

b) Calculer $E(X)$ si elle existe.

Exercice 5.15 (★)
On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « pile », et on note N le nombre de lancers qui ont été nécessaires. On effectue alors une série de N lancers et on note X le nombre de « faces » obtenus lors de ces N lancers.

a) Quelle est la loi de N ?

b) Déterminer la loi de X conditionnellement à l'événement $[N = n], n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $E(X|[N = n])$ existe et la calculer.

c) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 5.16 (★)
Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n.
On effectue des tirages dans cette urne suivant le protocole suivant : si la boule numéro i vient d'être tirée, on la remet dans l'urne et on enlève toutes les boules portant un numéro strictement supérieur à i.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du k-ème tirage.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer $E(X_{k+1}|X_k = i)$.
2. Exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$, et en déduire la valeur de $E(X_k)$.

Exercice 5.17 (★★)
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. La valeur de cette variable est affichée sur un compteur détraqué :

- lorsque X est non nul, le compteur affiche X ;
- lorsque $X = 0$, le compteur affiche un nombre aléatoire compris entre 1 et n, tiré suivant une loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

On note Y la variable aléatoire égale au numéro affiché par le compteur. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

Exercice 5.18 (★★)
Un concierge possède 10 clés sur son trousseau. Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit une clé au hasard dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de clés à essayer par le concierge pour ouvrir une porte.

a) Déterminer la loi de X si le concierge essaie les clés sans remise, puis la loi de X s'il les essaie avec remise.

b) Le concierge essaie les clés sans remise s'il est sobre et avec remise s'il est ivre. De plus, on sait qu'il est ivre un jour sur 3.

   (i) Montrer que X admet une espérance, et la déterminer.

   (ii) Aujourd'hui, le concierge a eu besoin de 6 essais pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

(iii) Même question avec 11 essais.

Exercice 5.19 (★★)

La sonnerie retentit et le petit Nicolas est au rez-de-chaussée. Il rejoint l'escalier le plus proche et, en arrivant au pied de celui-ci, se dit qu'il a encore un peu de temps. Avant chaque pas, il lance une pièce équilibrée et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et de deux marches d'un coup s'il obtient « face ».
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et D_n le nombre de fois où le petit Nicolas a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas. Ainsi, si Nicolas obtient Pile, Face, Face, Pile, Face, ..., il progresse de la façon suivante :

$$1, 2, 2, 1, 2, \ldots$$

On a alors $X_4 = 6$, $D_4 = 2$, $X_5 = 8$, $D_5 = 3$.

1. Quelle est la loi usuelle suivie par D_n ?
2. Justifier que $X_n = 2D_n + (n - D_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire l'espérance et la variance de X_n.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ème marche. Ainsi, dans l'exemple de l'énoncé, on a $Y_3 = 2$, $Y_4 = 3$, $Y_5 = 3$, $Y_6 = 4$, ...

3. Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

Dans toutes les questions suivantes, on suppose n au moins égal à 3.

4. Soit U l'évènement « le petit Nicolas ne gravit qu'une marche à son premier pas ».
   (a) Justifier que $E(Y_n|U) = 1 + E(Y_{n-1})$.
   (b) Montrer de même que $E(Y_n|\bar{U}) = 1 + E(Y_{n-2})$.
   (c) En déduire que : $E(Y_n) = \frac{1}{2}E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}E(Y_{n-2}) + 1$.
5. On considère l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$ suivante :
   $$\forall n \geq 3, \quad u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} + 1 \qquad (\mathscr{R})$$
   (a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(\mathscr{R})$.
   (b) Montrer que u vérifie la relation $(\mathscr{R})$ si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation :
   $$\forall n \geq 3, \quad v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-2}.$$
   (c) En déduire la valeur de $E(Y_n)$.

1. D_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$. En effet, D_n correspond au nombre de succès "obtenir pile" de probabilité $1/2$ lors de la répétition de n expériences indépendantes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D_n est le nombre de pas de deux marches, $(n - D_n)$ est le nombre de pas à une marche. Ainsi le nombre X_n de marches franchies en tout est $2 \times D_n + (n - D_n) = D_n + n$.
   On rappelle que $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$ pour toute variable aléatoire X et pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$. D'où ici :
   $$E(X_n) = E(D_n + n) = E(D_n) + n = \frac{n}{2} + n = \frac{3n}{2},$$
   $$V(X_n) = V(D_n + n) = V(D_n) = n\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{n}{4}.$$
3. On a Y_1 variable constante égale à 1, puisqu'au premier pas, la marche 1 est atteinte ou dépassée. De plus $E(Y_1) = 1$.
   Y_2 est le nombre de pas nécessaires pour atteindre ou dépasser la deuxième marche. On a $Y_2(\Omega) = \{1, 2\}$. En effet, il y a deux possibilités :

- soit la deuxième marche est atteinte dès le premier pas, avec probabilité 1/2. Ainsi $P(Y_2 = 1) = 1/2$.
- soit le premier pas est un pas d'une marche. On est alors sûr qu'au deuxième pas, on atteint ou on dépasse la deuxième marche. On a donc $P(Y_2 = 2) = 1/2$.

Ainsi Y_2 suit une loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)$, et $E(Y_2)$ existe et vaut 3/2.

4. (a) On présente ici deux méthodes :
Méthode 1 : Sachant U, le petit Nicolas a déjà fait un pas et il lui reste $n-1$ marches à gravir, ce qu'il peut espérer faire en $E(Y_{n-1})$ pas, donc $E(Y_n|U) = 1 + E(Y_{n-1})$.

Méthode 2 : Notons que, pour tout $n \geq 3$, $Y_n(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$, et, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$P_U(Y_n = k) = P(Y_{n-1} = k - 1)$$

puisqu'en commençant par une marche, il reste $k-1$ pas pour gravir les $n-1$ marches restantes. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} E(Y_n|U) &= \sum_{k=1}^{n} kP_U(Y_n = k) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y_{n-1} = k - 1) = \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1)P(Y_{n-1} = j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} jP(Y_{n-1} = j) + \sum_{j=0}^{n-1} P(Y_{n-1} = j) = E(Y_{n-1}) + 1, \end{aligned}$$

(b) *Méthode 1 :* Sachant $\bar{U}$, le petit Nicolas a déjà fait un pas et il lui reste $n-2$ marches à gravir, ce qu'il peut espérer faire en $E(Y_{n-2})$ pas, donc $E(Y_n|\bar{U}) = 1 + E(Y_{n-2})$.

Méthode 2 : Notons que, pour tout $n \geq 3$, $Y_n(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$, et, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$P_{\bar{U}}(Y_n = k) = P(Y_{n-2} = k - 1),$$

puisqu'en commençant par deux marches, il reste $k - 1$ pas pour gravir les $n - 2$ marches restantes. D'où

$$\begin{aligned} E(Y_n|\bar{U}) &= \sum_{k=1}^{n} kP_{\bar{U}}(Y_n = k) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y_{n-2} = k - 1) = \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1)P(Y_{n-2} = j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} jP(Y_{n-2} = j) + \sum_{j=0}^{n-1} P(Y_{n-2} = j) = E(Y_{n-2}) + 1. \end{aligned}$$

(c) Y_n est une variable aléatoire finie, donc la formule de l'espérance s'applique pour le système complet d'évènement $(U, \bar{U})$ sans problème de convergence. On a pour tout $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= P(U)E(Y_n|U) + P(\bar{U})E(Y_n|\bar{U}) = \frac{1}{2}(E(Y_{n-1}) + 1) + \frac{1}{2}(E(Y_{n-1}) + 1) \\ &= \frac{1}{2}E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}E(Y_{n-2}) + 1. \end{aligned}$$

5. (a) On cherche α tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha n = \frac{1}{2}\alpha(n - 1) + \frac{1}{2}\alpha(n - 2) + 1$$

soit encore :

$$0 = -\frac{1}{2}\alpha - \alpha + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}.$$

Ainsi pour $\alpha = \dfrac{3}{2}$, la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(\mathscr{R})$.

(b) On a d'après la question précédente pour tout $n \geq 3$:

$$\alpha n = \frac{1}{2}\alpha(n-1) + \frac{1}{2}\alpha(n-2) + 1 \qquad \text{(E)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u \text{ vérifie la relation } (\mathscr{R}) &\Leftrightarrow \forall n \geq 3, \quad u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} + 1 \\ &\Leftrightarrow \forall n \geq 3, \quad (u_n - \alpha n) = \frac{1}{2}(u_{n-1} - \alpha(n-1) + \frac{1}{2}(u_{n-2} - (n-2)\alpha) \\ &\quad \text{en faisant } (\mathscr{R}) - (E) \end{aligned}$$

Ainsi u vérifie la relation $(\mathscr{R})$ si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation :

$$\forall n \geq 3, \quad v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-2}.$$

(c) Prenons $u_n = E(Y_n)$, et $v_n = u_n - \alpha n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes, u satisfait $(\mathscr{R})$. Donc v satisfait la relation de récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants de la question précédente. On cherche les solutions de l'équation caractéristique :

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

On a deux racines réelles distinctes, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = a + b(-1/2)^n.$$

De plus $v_1 = u_1 - \alpha = 1/3$ et $v_2 = u_2 - 2\alpha = 1/6$. On remplace alors :

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{3} \\ a + \dfrac{b}{4} = 1/6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{2}{9} \\ b = -\dfrac{2}{9} \end{cases}.$$

On obtient finalement pour tout $n \geq 1$:

$$E(Y_n) = v_n + \alpha n = \frac{2}{9}\left(1 - (-1/2)^n\right) + \frac{2}{3}n.$$

Exercice 5.20 (★★★ - D'après oral ESCP 1999)

Au casino, un croupier mélange trois cartes : as de coeur, roi de coeur et valet de pique. Il les présente face cachée, et un joueur choisit l'une des cartes au hasard. Si c'est un coeur, il gagne deux euros pour le roi ou un euro pour l'as, et le jeu recommence. Si c'est le valet de pique, le jeu s'arrête. On note N le nombre de cartes tirées par le joueur, et X la somme qu'il a gagnée à la fin de la partie.

a) Déterminer la loi de N.

b) Déterminer la loi de X sachant que $[N = n]$.

c) Quel prix minimum le casino doit-il faire payer les parties pour que ce jeu soit rentable ?

Exercice 5.21 (★★★★ - D'après oral ESCP 2003)

On dispose d'une urne contenant n boules portant des numéros deux à deux distincts. Un premier joueur effectue une suite de tirages sans remise dans cette urne jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro. On note alors X_1 le nombre de tirages qu'il a effectué pour obtenir cette boule. S'il reste des boules dans l'urne, un second joueur effectue la même expérience, c'est-à-dire qu'il tire des boules de l'urne, sans remise, jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro parmi celles qui n'ont pas été tirées par le premier joueur. On note alors X_2 le nombre de tirages effectués par ce second joueur. Si le premier joueur a déjà tiré toutes les boules, alors X_2 prend la valeur 0.

a) Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_2 conditionnellement à l'événement $[X_1 = i]$.

c) En déduire l'espérance de X_2.

d) Déterminer la loi de X_2 et retrouver le résultat de la question précédente.

a) Puisque les tirages sont effectués sans remise, on a $X_1(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

Posons A_i l'évènement « le joueur 1 tire la boule portant le plus grand numéro au tirage numéro i ». Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$[X_1 = k] = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

On obtient par la formule des probabilités composées (les évènements A_i n'étant pas indépendants puisque les tirages sont sans remise) :

$$P([X_1 = k]) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \dots P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k}{n-k+1}\frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}.$$

Donc la variable X_1 suit une loi uniforme $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

On a donc $E(X_1) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X_1) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a deux cas possibles :

- $i = n$: dans ce cas la loi de X_2 sachant $[X_1 = n]$ est la loi certaine égale à 0, et on a alors $E(X_2|[X_1 = n]) = 0$.
- $1 \leq i \leq n-1$: si $[X_1 = i]$ est réalisé, on se retrouve dans le cas de la question précédente avec une urne de $n - i$ boules, dans laquelle on fait des tirages sans remise jusqu'à obtenir la plus grande boule. On a donc :
$$X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n-i]\!].$$
Donc $E(X_2|[X_1 = i])$ existe et vaut $\dfrac{1+n-i}{2}$.

c) Le support de X_2 étant fini (égal à $[\![0, n-1]\!]$), l'espérance de X_2 existe bien. De plus par la formule de l'espérance totale avec le système complet d'évènements $([X_1 = i])_{i=1,\dots,n}$, on a :

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= P(X_1 = n)E(X_2|[X_1 = n]) + \sum_{i=1}^{n-1} P(X_1 = i)E(X_2|[X_1 = i]) \\
&= 0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1+n-i}{2} \\
&= \frac{(n-1)(n+1)}{2n} - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{(n-1)(n+1)}{2n} - \frac{n(n-1)}{4n} = \frac{(n-1)}{4n}(2n+2-n) = \frac{(n-1)(n+2)}{4n}
\end{aligned}$$

d) On a déjà donné le support $X_2(\omega) = [\![0, n-1]\!]$. De plus pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

- si $k = 0$, $P(X_2 = 0) = P(X_1 = n) = \dfrac{1}{n}$.
- si $1 \leq k \leq n-1$, alors on a par la formule des probabilités totales (en notant que $X_1 + X_2 \leq n$, et donc que $P_{[X_1=i]}(X_2 = k) = 0$ si $i + k > n$) :

$$P([X_2 = k]) = \sum_{i=1}^{n-k} P(X_1 = i)P_{[X_1=i]}(X_2 = k) = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{n}\frac{1}{n-i} = \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}$$

On sait que $E(X_2)$ existe car X_2 est finie, et on a :

$$\begin{aligned} E(X_2) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_2 = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{k}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i}\frac{k}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2i} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}(i+1) = \frac{(n-1)(2+n)}{4n} \end{aligned}$$

Fonction génératrice

Exercice 5.22 (★★★★ - Fonction génératrice - ✍)

Partie I. Cas d'une variable aléatoire discrète finie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
On appelle *fonction génératrice de* X la fonction polynômiale G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ ($p \in]0,1[$) puis $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0,n]\!])$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'(1)$ et $V(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.
4. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$.
   En déduire que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.

Partie II. Cas d'une variable aléatoire discrète infinie.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Soit $t \in [-1, 1]$. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} P(X = k)t^k$ est absolument convergente.

   On appelle alors *fonction génératrice de* X la fonction G définie sur $[-1, 1]$ par :

   $$\forall t \in [-1, 1],\ G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k.$$

2. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ ($\lambda \in]0, +\infty[$) puis $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$).
3. Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, $G(t) = E(t^X)$.
4. On suppose dans cette question que X **admet une espérance**.
   (a) Vérifier que :
   $$\forall t \in]-1, 1[,\quad \frac{G(t) - G(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right).$$
   (b) En déduire que $t \mapsto \dfrac{G(t) - G(1)}{t - 1}$ est croissante et majorée par $E(X)$ sur $[0, 1[$. Que peut-on en conclure ?
   (c) En remarquant que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall t \in [0, 1[,\quad \sum_{k=1}^{n}\left(P(X = k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \frac{G(t) - G(1)}{t - 1},$$
   montrer que $G'(1) = E(X)$.
5. On suppose dans cette question que G **est dérivable en** 1 (nécessairement à gauche vu son ensemble de définition).
   En utilisant la majoration du 4.(c), montrer que X admet une espérance, égale à $G'(1)$.

Partie I. Cas d'une variable aléatoire discrète finie.

1. On suppose que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, c'est à dire :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in [\![0,n]\!].$$

On a alors :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} = (tp + (1-p))^n.$$

Supposons maintenant que X suit une loi uniforme $\mathscr{U}([\![0,n]\!])$, c'est à dire :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad P(X=k) = \frac{1}{n+1} \quad \forall k \in [\![0,n]\!].$$

On a alors :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} t^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 \quad \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

2. Fixons $t \in \mathbb{R}$, et posons $Y = g(X)$ où $g : X(\Omega) = [\![0,n]\!] \to \mathbb{R}$ est définie par $g(k) = t^k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Y est une variable aléatoire finie, donc elle admet une espérance, et on a par le théorème de transfert :

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=0}^{n} g(k) P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k) = G(t).$$

3. G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{n} k P(X=k) t^{k-1},$$

$$G''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) P(X=k) t^{k-2}.$$

Dès lors, on a :

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{n} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k P(X=k) = E(X)$$

et

$$\begin{aligned} G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) P(X=k) + \sum_{k=1}^{n} k P(X=k) - E(X)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) P(X=k) + \sum_{k=0}^{n} k P(X=k) - E(X)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(k(k-1) + k\right) P(X=k) - E(X)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) - E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 = V(X). \end{aligned}$$

4. On dérive k fois[a] la fonction G ($k \in [\![0, n]\!]$) : on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G^{(k)}(t) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1)P(X=k)t^{i-k}.$$

En prenant $t = 0$ dans cette expression, seul le terme constant reste (en $i = k$) :

$$G^{(k)}(0) = k(k-1)\dots(k-k+1)P(X=k) = k!P(X=k).$$

Ainsi on a bien $P(X=k) = \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$.

Partie II. Cas d'une variable aléatoire discrète infinie.

1. Soit $t \in [-1, 1]$. On a :
$$|P(X=k)t^k| = P(X=k)|t|^k \leq P(X=k)$$
Or $\sum_{k\geq 0} P(X=k)$ est une série convergente, de somme égale à 1 (propriété du système complet d'évènements $[X=k]$). Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $|P(X=k)t^k|$ est convergente, et donc que $\sum_{k\geq 0} P(X=k)t^k$ est absolument convergente.
Ainsi pour tout $t \in [-1, 1]$, la série la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} P(X=k)t^k$ est absolument convergente.

2. La convergence des séries à considérer a été établie à la question précédente. Reste à calculer leur somme.

   - On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, c'est à dire :
   $$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
   On a alors :
   $$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{t\lambda - \lambda}.$$
   - On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, c'est à dire :
   $$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad P(X=k) = (1-p)^{k-1}p \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$
   On a alors :
   $$G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}pt^k = \sum_{k=1}^{+\infty}(t-tp)^{k-1}(pt) \underset{t(1-p)\in]-1,1[}{=} \frac{tp}{1-(t-tp)} = \frac{tp}{1-t(1-p)}.$$

3. Fixons $t \in \mathbb{R}$, et posons $Y = g(X)$ où $g : X(\Omega) = \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est définie par $g(k) = t^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Y est une variable aléatoire infinie. Par le théorème de transfert, elle admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 0} g(k)P(X=k) = \sum_{k\geq 0} t^k P(X=k)$ converge absolument. Or on a montré que c'était bien le cas au début de la partie II. Ainsi $E(Y)$ existe bien, et on a :
$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X=k) = G(t).$$

4. On suppose dans cette question que X **admet une espérance**.

(a) Soit $t \in]-1,1[$. On a :

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)}{t-1} \underset{\text{les séries convergent}}{=} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)(t^k-1)}{t-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\frac{t^k-1}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right)$$

car $\dfrac{t^k-1}{t-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} t^i$ lorsque $t \neq 1$.

(b) • *Croissance.* Pour tout $0 \leq t \leq t' < 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right).$$

Ainsi en sommant pour $k = 1, \ldots, N$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \sum_{k=1}^{N} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right).$$

On a donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right)$. En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on a donc :

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right) = \frac{G(t')-G(1)}{t'-1}.$$

Ainsi $t \mapsto \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est croissante.

• *Majoration.* On reprend la majoration précédente pour $t \in [0,1[$:

$$\sum_{k=1}^{N} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \sum_{k=1}^{N} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} 1^i\right) = \sum_{k=1}^{N} kP(X=k)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = E(X).$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on a donc :

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq E(X).$$

Ainsi $t \mapsto \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est majorée par $E(X)$.

Comme $t \mapsto \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est croissante et majorée sur $[0,1[$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \frac{G(t)-G(1)}{t-1}$ existe et est finie. Ainsi G est dérivable en 1, et $G'(1) \leq E(X)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [0,1[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right)}_{\geq 0} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) = \frac{G(t)-G(1)}{t-1}$$

On passe alors à la limite quand $t \to 1^-$ dans l'inégalité précédente (on a montré à la question précédente que tout converge) :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1}1\right) = \sum_{k=1}^{n}(P(X=k)k) \leq G'(1)$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut passer à la limite quand $n \to +\infty$ (la série converge car $E(X)$ existe !) :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) \leq G'(1).$$

Comme de plus on avait établi que $G'(1) \leq E(X)$ à la question précédente, on en déduit finalement que $G'(1) = E(X)$.

5. On suppose dans cette question que G **est dérivable en** 1. Il suffit ici de prouver que $E(X)$ existe, car alors par la question précédente $E(X) = G'(1)$.

   Reprenons l'inégalité précédente valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1}t^i\right)}_{\geq 0} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1}t^i\right) = \frac{G(t)-G(1)}{t-1}$$

   On passe alors à la limite quand $t \to 1^-$ dans l'inégalité précédente (toutes les limites existent et sont finies) :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1}1\right) = \sum_{k=1}^{n}(P(X=k)k) \leq G'(1)$$

   Ainsi la suite des sommes partielles $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ est majorée (par $G'(1)$). Elle est de plus croissante car son terme général est positif. Elle converge donc (absolument). Ainsi l'espérance de X existe bien (et vaut $G'(1)$ par la question précédente).

[a] Montrer le par récurrence si vous ne le voyez pas !