TD6

Applications linéaires

Applications linéaires

Exercice 6.1 (★)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z,-x+2y+z) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y,4x-y,-2x+2y+3z) \end{array}$$

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P-(X+1)P' \end{array}$$

$$i: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

Exercice 6.2 (★★ - ✍)

Soient E,F,G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

> $\Rightarrow$ Supposons que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$. Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, montrons que $y \in \mathrm{Ker}(g)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On obtient alors :
>
> $$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0_G.$$
>
> D'où $y \in \mathrm{Ker}(g)$, et donc l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
>
> $\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Pour tout $x \in E$, on a :
>
> $$g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)}) = 0_G.$$
>
> D'où $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$.

Exercice 6.3 (★★)

Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est M.

b) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

> a) Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, on a :
>
> $$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \varphi(X^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i = (X+1)^i.$$
>
> On en déduit que pour tout polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, on a :
>
> $$\begin{aligned} \varphi(P) &= a_n \varphi(X^n) + \cdots + a_1 \varphi(X) + a_0 \varphi(1) \\ &= a_n (X+1)^n + \cdots + a_1 (X+1) + a_0 = P(X+1). \end{aligned}$$

Ainsi φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ envoyant $P(X)$ sur $P(X+1)$. Ainsi on a par exemple :

$$\phi(X^2+3X+2) = (X+1)^2 + 3(X+1) + 2.$$

b) M est inversible car triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale. Donc φ est bijective, et il est facile de deviner son inverse :

$$\psi : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(X-1).$$

Ainsi on a par exemple :

$$\psi(X^2+3X+2) = (X-1)^2 + 3(X-1) + 2.$$

En effet, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\psi \circ \phi(P) = \psi(P(X+1)) = P((X-1)+1) = P(X).$$

Ainsi on a par exemple :

$$\psi \circ \phi(X^2+3X+2) = \psi((X+1)^2+3(X+1)+2) = ((X-1)+1)^2+3((X-1)+1)+2 = X^2+3X+2.$$

On obtient donc $M^{-1} = M_{\mathscr{B}}(\phi^{-1}) = M_{\mathscr{B}}(\psi)$ où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique. Reste donc à déterminer cette matrice :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \psi(X^k) = (X-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i.$$

Ainsi on a :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \dots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.4 (★★ - Interpolation de Lagrange - ✍)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1},\ P \mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\},\ Q(a_i) = b_i$.
4. (i) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

   (ii) En déduire que la *matrice de Vandermonde* $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.
5. Notons $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux réels $(a_0, \dots, a_n)$.

   (i) Calculer $\varphi(L_i)$.

   (ii) Retrouver alors que φ est un isomorphisme, et que $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6.5 (★★ - Formes linéaires et hyperplans - ✍)

1. Montrer que si φ est une forme linéaire non nulle de E, alors $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.
2. Réciproquement, soit H un hyperplan de E.

(a) Soit $a \notin H$. Montrer que :
$$E = H \oplus \text{Vect}(a).$$
Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(y, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que :
$$x = y + \lambda_x a.$$

(b) On définit l'application $\varphi : E \to \mathbb{K}$ par $\varphi(x) = \lambda_x$ pour tout $x \in E$. Montrer que φ est une forme linéaire de E.

(c) Montrer que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Conclure.

3. **Application.** Montrer que $\text{Ker}(\text{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.

1. φ étant une forme linéaire, $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, non réduit à $\{0\}$ car φ est non nulle. Comme $\dim(\mathbb{R}) = 1$, on a donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Par le théorème du rang, on en déduit que :
$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(E) - 1.$$
Donc $\text{Ker}(\varphi)$ est bien un hyperplan de E.

2. (a) Comme $a \notin H$, on a en particulier que $a \neq 0_E$ et donc que $\dim(\text{Vect}(a)) = 1$. Ainsi on a déjà $\dim(E) = \dim(H) + \dim(\text{Vect}(a))$. Étudions maintenant $H \cap \text{Vect}(a)$, et soit pour cela $u \in H \cap \text{Vect}(a)$. Comme $u \in \text{Vect}(a)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda a$. Si de plus $\lambda \neq 0$, alors on aurait :
$$a = \frac{1}{\lambda} u \in H \quad \text{car} \quad u \in H \cap \text{Vect}(a).$$
D'où une contradiction. Donc $\lambda = 0$, de sorte que $u = 0_E$ et donc que $H \cap \text{Vect}(a) = \{0_E\}$. On peut donc conclure que :
$$E = H \oplus \text{Vect}(a).$$

(b) φ est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$. Reste à montrer qu'elle est linéaire. Soit pour cela $x_1, x_2 \in E$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Puisque $E = H \oplus \text{Vect}(a)$, il existe (y_1, λ_{x_1}) et (y_2, λ_{x_2}) tels que :
$$x_1 = y_1 + \lambda_{x_1} a \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + \lambda_{x_2} a.$$
Par somme, on a :
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{\in H} + \underbrace{(\alpha_1 \lambda_{x_1} + \alpha_2 \lambda_{x_2})}_{\in \mathbb{K}} a.$$
Par unicité de la décomposition dans une somme directe, on en déduit que :
$$\lambda_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} = \alpha_1 \lambda_{x_1} + \alpha_2 \lambda_{x_2}$$
ce qui s'écrit aussi :
$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lambda_{x_1} + \alpha_2 \lambda_{x_2} = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2).$$
Dons φ est bien une forme linéaire.

(c) On procède par double inclusion :

$\subset$ Soit $x \in H$, on a $x = \underbrace{x}_{\in H} + 0a$. Par unicité de l'écriture dans une somme directe, on a donc $\varphi(x) = \lambda_x = 0$. Ainsi x appartient à $\text{Ker}(\varphi)$.

$\supset$ Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$. Il existe un unique couple $(y, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que :
$$x = y + \lambda_x a.$$
De plus on a $0 = \varphi(x) = \lambda_x$. Donc on a $x = y \in H$.

Ainsi on a bien $H = \text{Ker}(\varphi)$ et H est bien le noyau d'une forme linéaire non nulle.

3. On a vu que Tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, non nulle car par exemple $\mathrm{Tr}(I_n) = n$. D'après ce qu'on a obtenu plus haut, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est donc un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. De plus pour $a = I_n$, on a $I_n \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ et par ce qui a été fait :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n).$$

Pour plus d'informations sur les formes linéaires et hyperplans, je vous renvoie au :

☞ **Complément de cours 2. Formes linéaires et hyperplans.**

Exercice 6.6 (★★★ - Noyaux et images itérées - ✍)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u satisfaisant $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. (a) On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que pour tout $k \geq r$, $N_r = N_k$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier $p \leq n$ tel que $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & N_k \neq N_{k+1} \\ \forall k \geq p, & N_k = N_{k+1} \end{cases}$.
   (c) Montrer qu'on a aussi $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \geq p, & I_k = I_{k+1} \end{cases}$.
3. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$, puis que la restriction de u à N_p est un endomorphisme nilpotent dont on précisera l'ordre de nilpotence, et sa restriction à I_p est un automorphisme de I_p.

1. On a :
   - $N_k \subset N_{k+1}$. Soit $x \in N_k$, on a $u^k(x) = 0_E$. Alors en composant par u :
   $$u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E.$$
   Ainsi on a bien $x \in N_{k+1}$.
   - $I_{k+1} \subset I_k$. Soit $y \in I_{k+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x)$. Mais alors on a :
   $$y = u^k(u(x)) \in Im(u^k).$$
   Ainsi on a bien $y \in I_k$.
   - N_k est stable par u. Pour tout $x \in N_k$, on a :
   $$u^k(u(x)) = u^{k+1}(x) = u(\underbrace{u^k(x)}_{=0_E}) = 0_E.$$
   Ainsi $u(x)$ appartient à N_k, et N_k est bien stable par u.
   - I_k est stable par u. Pour tout $y \in I_k$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^k(x)$. On a alors :
   $$u(y) = u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) \in I_k.$$
   Ainsi $u(x)$ appartient à I_k, et I_k est bien stable par u.
2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, $N_p = N_{p+k}$.

   Init. La propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$ (par hypothèse).

   Hér. Soit $k \geq 1$ et supposons la propriété au rang k vraie, c'est à dire $N_p = N_{p+k}$. Puisqu'on a :
   $$N_p \subset N_{p+1} \subset \cdots \subset N_{p+k},$$
   on en déduit que $N_p = N_{p+1} = \cdots = N_{p+k}$.

Par la question précédente, on a déjà que $N_{p+k} \subset N_{p+k+1}$. Soit à présent $x \in N_{p+k+1}$. On a :

$$u^{p+k+1}(x) = 0_E \Rightarrow u^{p+k}(u(x)) = 0_E.$$

Ainsi on a $u(x) \in Ker(u^{p+k}) = Ker(u^{p+k-1})$ et donc :

$$u^{p+k-1}(u(x)) = 0_E \Rightarrow u^{p+k}(x) = 0_E.$$

Finalement on a bien $x \in Ker(u^{p+k}$) et donc $N_{p+k} \supset N_{p+k+1}$. D'où la propriété au rang $k+1$.

On conclut par principe de récurrence.

3. La suite des dimensions (n_k) des N_k est une suite d'entiers naturels croissante d'après 1., et majorée par $n = \dim(E)$. Elle est donc constante à partir d'un certain rang, et il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $n_s = n_{s+1}$. Dès lors on a :

$$\begin{cases} n_s = n_{s+1} \\ N_s \subset N_{s+1} \end{cases} \Rightarrow N_s = N_{s+1}.$$

Considérons p le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$ (un tel entier existe car $A = \{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$ est une partie non vide (contient s) de $\mathbb{N}$). Alors on a :

- $\forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad N_k \neq N_{k+1}$ par définition de p.
- $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1}$ grâce à la question 2.(a).

Enfin, comme $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_p \leq n$, on a :

$$n = n_p - n_0 = \underbrace{(n_p - n_{p-1})}_{\geq 1} + \underbrace{(n_{p-1} - n_{p-2})}_{\geq 1} + \cdots + \underbrace{(n_1 - n_0)}_{\geq 1} \geq p.$$

Donc on a $p \leq n$.

4. Par le théorème du rang appliqué à u^k, on a :

$$\dim(E) = rg(u^k) + \dim(Ker(u^k)) \quad \Rightarrow \quad n = i_k + n_k,$$

où $i_k = \dim(I_k)$. (n_k) étant une suite d'entiers strictement croissante puis constante à partir du rang p, la suite (i_k) est donc strictement décroissante puis constante à partir du rang q. En utilisant de plus que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a les inclusion $I_{k+1} \subset I_k$, il suit que $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \Rightarrow I_k = I_{k+1} \end{cases}$.

5. On a déjà par le théorème du rang (appliqué à u^p que $\dim(E) = \dim(N_p) + \dim(I_p)$.

Montrons que $N_p \cap I_p = \{0_E\}$. Soit $y \in N_p \cap I_p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Alors on a :

$$u^p(y) = 0_E \quad \Rightarrow \quad u^{2p}(x) = 0_E.$$

Donc x appartient à $Ker(u^{2p})$, qui est égal à $Ker(u^p)$ par définition de p. On obtient :

$$y = u^p(x) = 0_E.$$

Ainsi $N_p \cap I_p = \{0_E\}$, et on a bien :

$$E = N_p \oplus I_p.$$

On sait déjà que u induit des endomorphismes sur N_p et I_p (car ces s.e.v sont stables par u).

Considérons l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur N_p. Alors pour tout $x \in N_p$, $\tilde{u}^p(x) = u^p(x) = 0_E$. Ainsi $\tilde{u}$ est un endomorphisme nilpotent. Comme de plus $N_{p-1} \subsetneq N_p$, alors il existe $x \in N_p \setminus N_{p-1}$, et on a $\tilde{u}^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Donc l'indice de nilpotence de $\tilde{u}$ est p.

Considérons l'endomorphisme $\bar{u}$ induit par u sur I_p. Montrons que $\bar{u}$ est un automorphisme de I_p. Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $\bar{u}$ est injective. Soit donc $x \in I_p$ tel que $\bar{u}(x) = 0_E$. Alors on a :

$$u(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad x \in Ker(u).$$

Ainsi on a $x \in N_1 \cap I_p$. Or on a vu que $N_1 \subset N_p$, donc $x \in N_p \cap I_p = \{0_E\}$. On a donc bien $x = 0_E$, et $\bar{u}$ est bien un automorphisme de I_p.

À retenir.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Il existe un entier $p \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$\mathrm{Ker}(u) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1}) = \cdots$$

et

$$\mathrm{Im}(u) \supsetneq \mathrm{Im}(u^2) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Im}(u^p) = \mathrm{Im}(u^{p+1}) = \cdots$$

En d'autres termes, la suite des noyaux itérées (resp. des images itérées) est d'abord strictement croissante (resp. décroissante) puis constante. De plus ces suites stationnent à partir du même rang.

Exercice 6.7 (★★★★ - QSP HEC 2014)
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Rang

Exercice 6.8 (★★)
Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, et soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

1. On a $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\mathrm{Im}(g))$. D'où le résultat.
2. Prenons $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x))$. Or $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p.$$

On en déduit que :

$$y = g(f(x)) = \lambda g(e_1) + \cdots + \lambda_p g(e_p).$$

Ainsi on a $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Vect}(g(e_1), \ldots, g(e_p))$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, e_i appartient à $\mathrm{Im}(f)$, donc il existe $x_i \in E$ tel que $e_i = f(x_i)$. On en déduit que :

$$g(e_i) = g(f(x_i)) = g \circ f(x_i) \in \mathrm{Im}(g \circ f).$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on en déduit que $\mathrm{Vect}(g(e_1), \ldots, g(e_p)) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$. D'où l'égalité $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Vect}(g(e_1), \ldots, g(e_p))$ et le fait que $(g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$.

Enfin, comme $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$, on a :

$$\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) \leq \mathrm{Card}((g(e_1), \dots, g(e_p))) = p = \mathrm{rg}(f).$$

D'où le résultat.

3. À l'aide des questions précédentes, on a donc obtenu que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

Exercice 6.9 (★★ - ✍)

Soit E de dimension finie n. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $p \geq 1$ tel que :

$$f^p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

L'entier p s'appelle alors *l'indice de nilpotence de f*.

On suppose dans la suite que f est un endomorphisme nilpotent d'indice p.

1. (a) f peut-il être bijectif ?
   (b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
   (c) En déduire que $f^n = 0$.
2. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer le rang de f.
3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.

Voir correction du DM4.

Exercice 6.10 (★★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2).$$

Avant de faire cet exercice, rappelons des inclusions qui devraient être connues (suite des noyaux et images itérées) :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Prouvons ces inclusion :

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$. D'où en composant par f, on obtient $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Ainsi on a bien que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
- Soit $z \in \mathrm{Im}(f^2)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = f^2(x) = f(\underbrace{f(x)}_{\in E}) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi on a bien $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

On montre cette équivalence par double implication.

$\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Puisque $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

Par le théorème du rang, on a aussi :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f^2) = \dim \mathrm{Ker}(f^2).$$

Puisque $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, on en déduit donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Montrons à présent la somme direct. On a déjà l'égalité des dimensions par le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Montrons que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus $y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc on a $0_E = f(y) = f(f(x)) = f^2(x)$. Ainsi on a $x \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. Donc $y = f(x) = 0_E$.

On peut donc conclure que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

$\Rightarrow$ Supposons que $E = \mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, ce qui impliquera en particulier l'égalité des dimensions. On a déjà une inclusion (qui est toujours vraie) :

$$\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Montrons l'inclusion réciproque : soit $z \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = f(x)$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$ tel que :

$$x = x_1 + x_2.$$

De plus $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $t \in E$ tel que $x_2 = f(t)$. On obtient finalement :

$$z = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = 0_E + f(f(t)) = f^2(t).$$

Ainsi $z \in \mathrm{Im}(f^2)$, et on a bien que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, et donc que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

Projecteurs et symétries

Exercice 6.11 (★)

Soit p l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $p(x,y) = (9x - 12y, 6x - 8y)$.

a) Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et de $\mathrm{Im}(p)$. p est-elle injective ? bijective ?

c) Montrer que p est un projecteur.

d) Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6.12 (★★ - ✍)

a) À l'aide d'un raisonnement par Analyse-Synthèse, montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit p le projecteur sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, q le projecteur associé. Déterminer $p(M)$ et $q(M)$ en fonction de M et ${}^tM$.

a) On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe S et A des matrices symétriques et antisymétriques respectivement telles que :

$$M = S + A. \qquad (1)$$

En prenant la transposée dans cette égalité, on obtient :

$${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A. \qquad (2)$$

En faisant $(1) + (2)$ et $(1) - (2)$, on obtient alors :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Synthèse. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose alors :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Vérifions les points suivants :

- $M = S + A$:
$$S + A = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2} = M.$$
- S est symétrique :
$${}^tS = \frac{{}^tM + ({}^t({}^tM))}{2} = \frac{{}^tM + M}{2} = S.$$
- A est antisymétrique : on procède de même.

Ainsi, on a donc montré que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que :
$$M = S + A,$$
soit en d'autres termes que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

b) En reprenant la question précédente, on a donc montré que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que :
$$M = S + A.$$
De plus on a :
$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$
Par définition de p et de q, on a :
$$p(M) = S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad q(M) = A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Exercice 6.13 (★★ - ✍)

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à P associe R, reste de la division euclidienne de P par A. Montrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

Commençons par rappeler le théorème de division euclidienne des polynômes, essentiel ici :

Théorème. Soient P, A deux polynômes tels que $A \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :
$$\begin{cases} P = AQ + R \\ \deg(R) < \deg(A) \end{cases}$$
Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B.

Montrons que f est linéaire : soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple (Q_1, R_1) et un unique couple (Q_2, R_2) tels que :
$$P_1 = AQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad P_2 = AQ_2 + R_2$$
avec $\deg(R_1), \deg(R_2) < \deg(A)$. On obtient donc que :
$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = A(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$$
avec de plus $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(A)$. Par unicité du reste dans le théorème de division euclidienne, on en déduit donc que $(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ par A. Ainsi on a :
$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$
Ainsi on a bien montré que f est linéaire. Montrons à présent que f est un projecteur. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) tel que :
$$P = AQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(A).$$

Faisons à présent la division euclidienne de R par A. On a :

$$R = A \times 0 + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(A)$$

Donc le quotient est 0 et le reste est R pour la division euclidienne de R par A. On peut donc conclure que :

$$f \circ f(P) = f(f(P)) = f(R) = R = f(P).$$

Ceci étant vrai quelque soit P, on en déduit que $f \circ f = f$, et donc que f est un projecteur, sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement par $\mathrm{Ker}(f)$.

Déterminons $\mathrm{Ker}(f)$: soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = AQ \Leftrightarrow A \text{ divise } P$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P\}$.

Déterminons $\mathrm{Im}(f)$: pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par A, et est donc de degré $< \deg(A) =: a$. Réciproquement si $\deg(P) < a$, alors on a :

$$P = A \times 0 + P \qquad \text{avec} \qquad \deg(P) < \deg(A).$$

Ainsi $P = f(P) \in \mathrm{Im}(f)$. On a donc montré que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{a-1}[X]$.

Une conséquence de cet exercice est qu'on a la somme directe :

$$\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_{a-1}[X] \oplus \{P \in \mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P\}.$$

Exercice 6.14 (★★ - Symétries vectorielles - ✍)

Soit E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces supplémentaires de E, de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que

$$z = x + y.$$

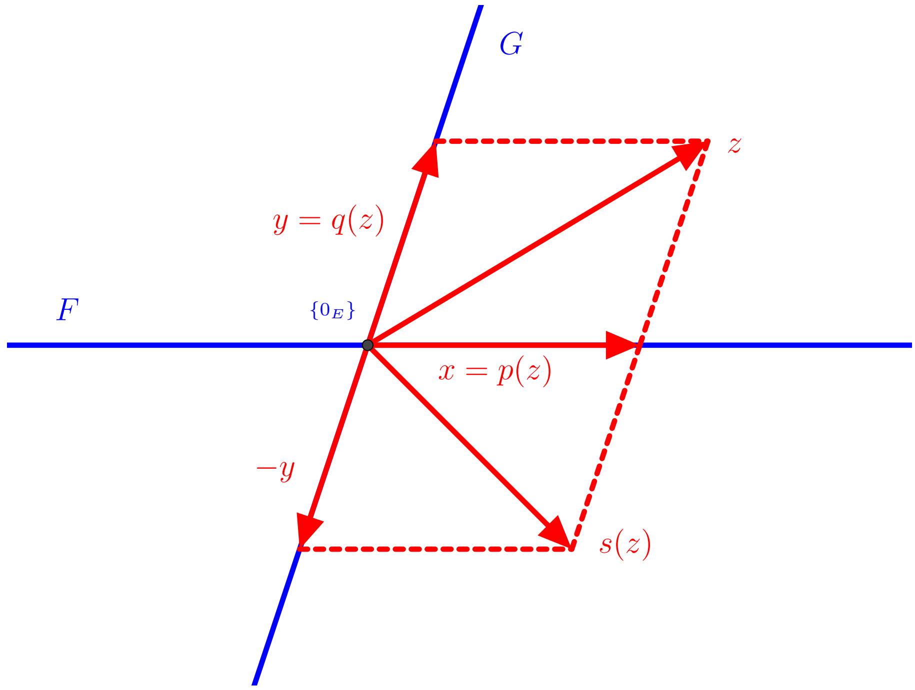
On définit s la *symétrie par rapport à F dans la direction de G* en posant

$$s(z) = x - y.$$

1. Montrer que s est une application linéaire.
2. Montrer que $s \circ s = Id_E$. En particulier, s est un isomorphisme, et $s^{-1} = s$.
3. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - Id_E)$ et que $G = \mathrm{Ker}(s + Id_E)$.
4. On suppose que E est de dimension finie n, et on note $k = \mathrm{Im}(F)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Montrer que

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0\dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-k \text{ fois}}).$$

1. Notons p le projecteur sur F parallèlement à G, et q le projecteur associé sur G parallèlement à F. On a $s = p - q$ par définition. Comme de plus p et q sont linéaires (on l'a fait en cours), il en résulte que s est linéaire.



Symétrie de z par rapport à F dans la direction de G.

2. Rappelons que comme p et q sont associés, on a :
$$p + q = Id_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
On en déduit en particulier que :
$$s = p - q = 2p - Id_E = Id_E - 2q.$$
Calculons :
$$s \circ s = (2p - Id_E) \circ (2p - Id_E) = 4p \circ p - 2p - 2p + Id_E = Id_E.$$
Ainsi s est un isomorphisme, d'inverse $s^{-1} = s$.

3. Montrons que $F = \text{Ker}(s - Id_E)$.
   - $\subset$ Soit $x \in F$, on a $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et donc $s(x) = x$. Ainsi $(s - Id_E)(x) = 0_E$ et donc $x \in Ker(s - Id_E)$.
   - $\supset$ Soit $x \in Ker(s - Id_E)$, $\exists!(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. On a $s(x) = x$, d'où $y - z = y + z$, et donc par unicité de la décomposition dans une somme direct, $z = 0_E$. Ainsi $x = y \in F$.

   Montrons que $G = Ker(s + Id_E)$.
   - $\subset$ Soit $x \in G$, on a $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ et donc $s(x) = -x$ et $(s + Id_E)(x) = 0_E$. Ainsi $x \in Ker(s + Id_E)$.
   - $\supset$ Soit $x \in Ker(s+Id_E)$. $\exists!(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y+z$. On a $s(x) = -x$, d'où $y-z = -y-z$, et donc par unicité de la décomposition dans une somme direct, $y = 0_E$. Ainsi $x = z \in G$.

4. Soit donc $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_k)$ une base de F, $\mathscr{B}_G = (e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. Puisque $E = F \oplus G$, la famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. De plus on a :
   - pour tout $1 \leq i \leq k$, $e_i \in F$ et donc $s(e_i) = e_i$;
   - pour tout $k + 1 \leq i \leq n$, $e_i \in G$ et donc $s(e_i) = -e_i$.

On en déduit donc que la matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par :

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0\dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour plus de détails sur les symétries vectorielles :

☞ **Complément de cours 3. Symétries.**

Exercice 6.15 (★★ - Caractérisation d'une symétrie - ✍)
On considère $s \in \mathscr{L}(E)$ telle que $s \circ s = Id_E$.

a) Montrer que $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur que l'on déterminera.

b) En déduire que s est la symétrie sur $F = \mathrm{Ker}(s - Id_E)$ dans la direction de $G = \mathrm{Ker}(s + Id_E)$.

c) **Application.** Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = {}^tM$.

(a) Montrer que f est une symétrie et la décrire.

(b) Retrouver de cette manière que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

1. On a :
$$p \circ p = \frac{(s + Id_E) \circ (s + Id_E)}{4} = \frac{s \circ s + s + s + Id_E}{4} = \frac{s + Id_E}{2} = p.$$
Donc p est un projecteur.

2. p est un projecteur sur $F = Im(p) = Ker(p - Id_E)$ parallèlement à $G = Ker(p)$. En particulier on a :
$$E = F \oplus G.$$
Puisque $s = 2p - Id_E$, on en déduit que s est bien la symétrie par rapport à $F = Ker(\frac{s-Id_E}{2}) = Ker(s - Id_E)$ dans la direction de $G = Ker(\frac{s+Id_E}{2}) = Ker(s + Id_E)$.

Avec l'exercice précédent, on a donc montré le résultat suivant :

Théorème. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
$$s \text{ est une symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad s \circ s = Id_E.$$

3. (a) L'application f est linéaire par linéarité de la transposée. De plus on a pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
$$f \circ f(M) = f(f(M)) = f({}^tM) = {}^t({}^tM)) = M.$$
Ainsi f est bien une symétrie, sur $F = Ker(f - Id_E)$ dans la direction de $G = Ker(f + Id_E)$. Décrivons ces deux espaces :

- On a :
$$M \in F \Leftrightarrow M \in Ker(f - Id_E) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow {}^tM = M \Leftrightarrow M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$
Donc $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

- On a :

$$M \in G \Leftrightarrow M \in Ker(f + Id_E) \Leftrightarrow f(M) = -M \Leftrightarrow^t M = -M \Leftrightarrow M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Donc $F = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

(b) On en déduit en particulier, puisque s est une symétrie par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans la direction de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Pour plus de détails sur les symétries vectorielles :

☞ **Complément de cours 3. Symétries.**

Changement de bases

Exercice 6.16 (★)
Considérons la matice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.
On considère les vecteurs $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$.

a) Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et déterminer son inverse.

c) Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de a, b et c.

d) Déterminer la matrice T de u dans la base $\mathscr{B}$.

e) En déduire T^n puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.17 (★★)
Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique, notée $\mathscr{B}_{can}$.

3. On pose $P_1 = (X + 1)^2$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = (X - 1)^2$. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$.

4. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base $\mathscr{B}$. En déduire la matrice de φ^n dans la base canonique.

Exercice 6.18 (★★)
On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = AM - MA$.

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 6.19 (★★)
On considère $F = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$ et $G = Vect(1, 1, 1)$.

a) (i) Déterminer une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3) de G.

(ii) Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

b) On considère p le projecteur sur F parallèlement à G.

(i) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.

(ii) En déduire la matrice de p dans la base canonique. On pourra pour cela s'aider du logiciel `Scilab` pour les calculs matriciels.

(iii) Donner $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

c) Soit q le projecteur sur G parallèlement à F. Déterminer $q(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.20 (★★★)
Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Soit $\varphi : X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto AX \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Rappelons que si $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a (c'est du cours) :

$$M_{\mathscr{C}}(\varphi) = A.$$

On va montrer que B est la matrice de φ dans une autre base. Pour cela, on va commencer par analyser le problème pour savoir comment trouver cette base.

Analyse du problème. On cherche donc une base $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = B,$$

ce qui correspond à chercher des vecteurs f_1 et f_2 formant une famille libre et satisfaisant :

$$\varphi(f_1) = f_1 \quad \text{et} \quad \varphi(f_2) = 3f_2.$$

Recherche de la famille (f_1, f_2). Soit donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = X \Leftrightarrow x + y = 0$$

Ainsi $\text{Ker}(A - I_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et on prendra par exemple $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De même, on a :

$$AX = 3X \Leftrightarrow x - y = 0$$

Ainsi $\text{Ker}(A - 3I_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et on prendra par exemple $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifications. Reste à montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Elle est de cardinal $2 = \dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc bien une base. Et on a en remontant les calculs précédents que $\varphi(f_1) = f_1$ et $\varphi(f_2) = 3f_2$. Ainsi on a bien établi que :

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = B.$$

Les matrices A et B sont donc bien semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme dans des bases distinctes.

Trace

Exercice 6.21 (★★ - Trace d'un endomorphisme - ✍)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit f un endomorphisme de E. Justifier que toutes les matrices représentatives de f ont la même trace. Cette valeur commune est appelée *trace de* f et notée $\mathrm{Tr}(f)$.

2. Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et considérons l'application $u_A : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $u_A(M) = AM$.
   (a) Montrer que u_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $Tr(u_A)$.

3. Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

4. **Application.**
   (a) Soit $0 \leq r \leq n$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $\begin{cases} A^2 = A \\ Tr(A) = r \end{cases}$.
   Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.22 (★★)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{Tr}(f) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :
$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que f est un projecteur.

1. **Analyse du problème.** On cherche une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que :
$$f(e_1) = a_1 e_1, \dots, f(e_n) = a_n e_1.$$
Puisque f est de rang 1, l'un des a_i est non nul et donc e_1 appartiendrait à $Im(f)$ qui est de dimension 1. Ainsi il faudra prendre e_1 une base de $Im(f)$, et on n'a pas de contrainte pour $e_2, \dots, e_n$.

   Construction de la base. Prenons donc e_1 une base de $\mathrm{Im}(f)$. On la complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(e_i)$ appartient à $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1)$, donc il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que :
$$f(e_i) = a_i e_1.$$
On peut donc écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$:
$$M = M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On a :
$$M^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus on sait que $1 = \text{Tr}(f) = \text{Tr}(M) = a_1$. Donc on obtient :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Ainsi f est bien un projecteur.

Exercice 6.23 (★★★ - Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A(M) = \text{Tr}(AM)$.
   Montrer que φ_A définit une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On considère l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ définie par $\Phi(A) = \varphi_A$.
   (a) Montrer que Φ est linéaire.
   (b) Montrer que Φ est un isomorphisme.
   Indication. On pourra calculer $\varphi_A(E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice (i, j).
   (c) En déduire que pour toute forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. φ_A est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus on a pour tout $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_A(\lambda M+\mu N) = \text{Tr}(A(\lambda M+\mu N) = \text{Tr}(\lambda AM+\mu AN) = \lambda\text{Tr}(AM)+\mu\text{Tr}(AN) = \lambda\varphi_A(M)+\mu\varphi_A(N).$$

   Donc φ_A est bien une forme linéaire.

2. (a) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrons que :

$$\Phi(\lambda A + \mu B) = \lambda\Phi(A) + \mu\Phi(B)$$

   soit en d'autres termes :

$$\varphi_{\lambda A+\mu B} = \lambda\varphi_A + \mu\varphi_B.$$

   Soit pour cela $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda A+\mu B}(M) &= \text{Tr}((\lambda A + \mu B)(M)) = \text{Tr}(\lambda AM + \mu BM) \\ &= \lambda\text{Tr}(AM) + \mu\text{Tr}(BM) = \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_B(M) \end{aligned}$$

   D'où l'égalité. Donc Φ est bien linéaire.

   (b) Montrons que Φ est injective. Soit pour cela $A \in \text{Ker}(\Phi)$, on a :

$$\Phi(A) = \varphi_A = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})}.$$

   Ainsi pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi_A(M) = 0, \text{ soit encore } \text{Tr}(AM) = 0.$$

   Prenons alors $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et calculons $\text{Tr}(AE_{i,j})$. Si on note C_k la k-ème colonne de A, on a :

$$AE_{i,j} = (0 \dots 0 \quad \underbrace{C_i}_{\text{colonne } j} \quad 0 \dots 0)$$

   Il y a un seul coefficient non nul sur la diagonale de $AE_{i,j}$ qui est celui de la j-ème ligne de C_i, soit $a_{j,i}$. Ainsi on a $\text{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. On peut donc conclure que si $A \in \text{Ker}(\Phi)$, alors $a_{j,i} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. D'où $A = 0$, et Φ injective. Comme de plus $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}))$, on en déduit que Φ est un isomorphisme.

(c) Ainsi tout forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un unique antécédent par Φ : il existe donc une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(A) = \varphi$, soit encore $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.24 (★★★★)
Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant :

$$\forall X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(XY) = f(YX).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda Tr$.

Soit f une telle forme linéaire. D'après l'exercice précédent, on sait qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(M) = \text{Tr}(AM).$$

On suppose de plus que pour tout $X, Y \in \mathscr{M}(\mathbb{K})$, $f(XY) = f(YX)$, ce qui donne :

$$\text{Tr}(AXY) = \text{Tr}(AYX).$$

Prenons en particulier $X = E_{i,j}$ et $Y = E_{k,l}$. Rappelons que :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l} \text{ où } \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :

$$\text{Tr}(AE_{i,j}E_{k,l}) = \delta_{j,k}\text{Tr}(AE_{i,l}) = \delta_{j,k} a_{l,i}$$

selon un calcul déjà effectué dans l'exercice précédent. De même,

$$\text{Tr}(AE_{k,l}E_{i,j}) = \delta_{l,i} a_{j,k}$$

Ainsi on a pour tout $1 \leq i, j, k, l \leq n$:

$$\delta_{j,k} a_{l,i} = \delta_{l,i} a_{j,k}.$$

En particulier on obtient :

- pour tout $l \neq i$ et en prenant $j = k$, on obtient $a_{l,i} = 0$. Donc A est une matrice diagonale.
- pour $i = l$ et $k = j$, on obtient $a_{i,i} = a_{j,j}$. Donc tous les coefficients diagonaux sont égaux.

On en déduit donc que A est une matrice scalaire, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. On peut donc conclure finalement que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$f(X) = \text{Tr}(AX) = \lambda \text{Tr}(X).$$

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 6.25 (★)
Déterminer un polynôme annulateur des endomorphismes suivants :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA + 2A \end{array}.$$

$$g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \varphi(x)u + x \end{array}$$ où E est un espace vectoriel, $u \in E$ et φ est une forme linéaire telle que $\varphi(u) = 1$.

Exercice 6.26 (★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $2f^2 - 3f - 9Id_E = 0$.
On pose alors $u = 2f + 3Id_E$ et $v = f - 3Id_E$.

a) Calculer $u - 2v$. En déduire que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

b) Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.

d) (Cubes) En déduire que f est diagonalisable.

1. On a :
$$u - 2v = 2f + 3Id_E - 2(f - 3Id_E) = 9Id_E.$$
Ainsi pour tout $x \in E$, on a :
$$u(x) - 2v(x) = 9x, \text{ soit } x = \underbrace{\frac{1}{9}u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)} + \underbrace{\frac{-2}{9}v(x)}_{\in \mathrm{Im}(v)}.$$
Ainsi on a $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

2. On a :
$$u \circ v = (2f + 3Id_E) \circ (f - 3Id_E) = 2f^2 - 3f - 9Id_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
Par l'exercice 2, on en déduit que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. De même, on a puisque u et v commutent (ce sont tous les deux des polynômes en f) :
$$v \circ u = u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
Ainsi on a également $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

3. Puisque $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, on a $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) \subset E$. Ainsi on a $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. Reste à montrer que cette somme est directe : soit pour cela $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$, on a :
$$u(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad 2f(x) + 3x = 0_E \quad (1)$$
et
$$v(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f(x) - 3x = 0_E \quad (2)$$
En faisant $(1) - 2(2)$, on obtient $9x = 0_E$, soit $x = 0_E$. Ainsi on a bien que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.

4. On a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2}Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f - 3Id_E)$ qui sont respectivement les sous-esapces propres de f associés aux valeurs propres $-\dfrac{3}{2}$ et 3. Comme on a $E = E_{-3/2}(f) \oplus E_3(f)$ est somme directe de sous-espaces propres de f, on en déduit que f est diagonalisable.

Sous-espaces stables

Exercice 6.27 (★)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

b) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est stable par f.

c) On pose $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = (0, 1, 0, 0)$ et $e_4 = f(e_3)$.
Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

d) Déterminer la matrice M' de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 6.28 (★)

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que F_i est stable par f pour tout $1 \leq i \leq n$.

Montrer que $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$ est stable par f.

> Soit $x \in F$, il existe $x_i \in F_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ tels que :
> $$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$
> D'où en composant par f linéaire :
> $$f(x) = \underbrace{f(x_1)}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{f(x_n)}_{\in F_n}$$
> car les F_i sont stables par f. Ainsi $f(x)$ appartient bien à F. D'où le résultat.

Exercice 6.29 (★★★ - QSP HEC 2017)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E.
Montrer que p et u commutent si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

> $\Rightarrow$ C'est du cours : si deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.
>
> $\Leftarrow$ Supposons donc que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u. Rappelons que puisque p est un projecteur, on a :
> $$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$$
> et que :
> $$\forall x \in \mathrm{Im}(p),\ p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathrm{Ker}(p),\ p(y) = 0_E.$$
> On va montrer que u et p commutent sur $\mathrm{Im}(p)$, sur $\mathrm{Ker}(p)$, puis sur E tout entier.
>
> – Sur $\mathrm{Ker}(p)$: pour tout $x \in \mathrm{Ker}(p)$, on a :
> $$u \circ p(x) = u(0_E) = 0_E \quad \text{et} \quad p \circ u(x) = p(\underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Ker}(u)}) = 0_E$$
> car $\mathrm{Ker}(p)$ est stable par u.
>
> – Sur $\mathrm{Im}(p)$: pour tout $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a :
> $$u \circ p(y) = u(y) \quad \text{et} \quad p \circ u(y) = p(\underbrace{u(y)}_{\in \mathrm{Im}(u)}) = u(y)$$
> car $\mathrm{Im}(p)$ est stable par u.
>
> – Sur E : pour tout $z \in E$, il existe $(x, y) \in \mathrm{Ker}(u) \times \mathrm{Im}(u)$ tel que $z = x + y$. On obtient :
> $$p \circ u(z) = p \circ u(x) + p \circ u(y) = u \circ p(x) + u \circ p(y) = u \circ p(x + y) = u \circ p(z)$$
> en utilisant que u et p commutent sur $\mathrm{Im}(p)$ et sur $\mathrm{Ker}(p)$. D'où le résultat.

Exercice 6.30 (★★★ - Caractérisation des homothéties - ✍)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles.

a) Montrer que $\forall x \neq 0_E, \exists! \lambda_x \in \mathbb{K} : f(x) = \lambda_x x$.

b) Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.

(i) Montrer que si x et y sont liés, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

(ii) Montrer que si (x, y) est une famille libre, alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x$. En déduire que $\lambda_x = \lambda_y$.

c) Déduire de ce qui précède que f est une homothétie.

a) Pour tout $x \in E$, $x \neq 0_E$, la droite $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f, donc en particulier $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Il existe donc un unique scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

b) Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.

(i) Supposons x et y liés. Puisqu'ils sont non nuls, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$. On a alors :

$$\lambda_y y = f(y) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y.$$

Puisque $y \neq 0_E$, on obtient $\lambda_y = \lambda_x$.

(ii) Supposons que (x, y) est une famille libre, alors :

$$\lambda_{x+y}(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Par liberté de la famille, on en déduit que $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$. Ainsi on a bien que $\lambda_x = \lambda_y$.

c) On a donc montré que pour tout x, y non nuls, $\lambda_x = \lambda_y$. Notons $\lambda \in \mathbb{K}$ ce réel. On a donc pour tout $x \neq 0_E$, $f(x) = \lambda x$. Puisque cette égalité est encore vraie pour $x = 0_E$, on obtient donc que $f = \lambda Id_E$. f est donc bien une homothétie.