

Applications linéaires

Applications linéaires

Exercice 6.1 (★)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$$\begin{array}{l}
 f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x, y, z) \mapsto (2x - y - z, -x + 2y + z) \\
 \\
 g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z)
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{l}
 h: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\
 P \mapsto P - (X + 1)P' \\
 \\
 i: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\
 P \mapsto P(1)
 \end{array}$$

Exercice 6.2 (★★ - 📖)

Soient E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Exercice 6.3 (★★)

Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est M .
- En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1} .

Exercice 6.4 (★★ - Interpolation de Lagrange - 📖)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\varphi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad P \mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

- Montrer que φ est linéaire.
- Montrer que φ est un isomorphisme.
- En déduire que pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}, Q(a_i) = b_i$.
- (i) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et \mathbb{R}^{n+1} .

- (ii) En déduire que la *matrice de Vandermonde* $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

- Notons $(L_i)_{i \in [0, n]}$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux réels (a_0, \dots, a_n) .

- Calculer $\varphi(L_i)$.
- Retrouver alors que φ est un isomorphisme, et que $(L_i)_{i \in [0, n]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6.5 (★★ - Formes linéaires et hyperplans - 📌)

1. Montrer que si φ est une forme linéaire non nulle de E , alors $H = \text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.
2. Réciproquement, soit H un hyperplan de E .

(a) Soit $a \notin H$. Montrer que :

$$E = H \oplus \text{Vect}(a).$$

Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(y, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que :

$$x = y + \lambda_x a.$$

- (b) On définit l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ par $\varphi(x) = \lambda_x$ pour tout $x \in E$. Montrer que φ est une forme linéaire de E .
- (c) Montrer que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Conclure.
3. **Application.** Montrer que $\text{Ker}(\text{Tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Exercice 6.6 (★★★ - Noyaux et images itérées - 📌)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \text{Ker}(u^k)$ et $I_k = \text{Im}(u^k)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u satisfaisant $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. (a) On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que pour tout $k \geq r$, $N_r = N_k$.
 (b) En déduire qu'il existe un entier $p \leq n$ tel que $\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, & N_k \neq N_{k+1} \\ \forall k \geq p, & N_k = N_{k+1} \end{cases}$.
 (c) Montrer qu'on a aussi $\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, & I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \geq p, & I_k = I_{k+1} \end{cases}$.
3. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$, puis que la restriction de u à N_p est un endomorphisme nilpotent dont on précisera l'ordre de nilpotence, et sa restriction à I_p est un automorphisme de I_p .

Exercice 6.7 (★★★★ - QSP HEC 2014)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Rang

Exercice 6.8 (★★)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.
2. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $\text{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(g \circ f)$.
En déduire que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.
3. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f))$.

Exercice 6.9 (★★ - 📌)

Soit E de dimension finie n . On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $p \geq 1$ tel que :

$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

L'entier p s'appelle alors *l'indice de nilpotence de f* .

On suppose dans la suite que f est un endomorphisme nilpotent d'indice p .

1. (a) f peut-il être bijectif ?
 (b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
 (c) En déduire que $f^n = 0$.
 2. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer le rang de f .
 3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.
-

Exercice 6.10 (★★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}(f) = \text{rg}(f^2).$$

Projecteurs et symétries**Exercice 6.11 (★)**

Soit p l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par $p(x, y) = (9x - 12y, 6x - 8y)$.

- a) Montrer que p est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
 - b) Déterminer une base de $\text{Ker}(p)$ et de $\text{Im}(p)$. p est-elle injective ? bijective ?
 - c) Montrer que p est un projecteur.
 - d) Les sous-espaces $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^2 ?
-

Exercice 6.12 (★★ - 📖)

a) À l'aide d'un raisonnement par Analyse-Synthèse, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit p le projecteur sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, q le projecteur associé. Déterminer $p(M)$ et $q(M)$ en fonction de M et tM .

Exercice 6.13 (★★ - 📖)

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à P associe R , reste de la division euclidienne de P par A . Montrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

Exercice 6.14 (★★ - Symétries vectorielles - 📖)

Soit E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces supplémentaires de E , de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que

$$z = x + y.$$

On définit s la *symétrie par rapport à F dans la direction de G* en posant

$$s(z) = x - y.$$

1. Montrer que s est une application linéaire.
2. Montrer que $s \circ s = Id_E$. En particulier, s est un isomorphisme, et $s^{-1} = s$.
3. Montrer que $F = \text{Ker}(s - Id_E)$ et que $G = \text{Ker}(s + Id_E)$.

4. On suppose que E est de dimension finie n , et on note $k = \text{Im}(F)$. Soit \mathcal{B} une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Montrer que

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-k \text{ fois}}).$$

Exercice 6.15 (★★ - Caractérisation d'une symétrie - 📌)

On considère $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s \circ s = \text{Id}_E$.

- Montrer que $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est un projecteur que l'on déterminera.
- En déduire que s est la symétrie sur $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ dans la direction de $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.
- Application.** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = {}^t M$.
 - Montrer que f est une symétrie et la décrire.
 - Retrouver de cette manière que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Changement de bases

Exercice 6.16 (★)

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à M .

On considère les vecteurs $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$.

- Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Donner la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} et déterminer son inverse.
- Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} en fonction de a , b et c .
- Déterminer la matrice T de u dans la base \mathcal{B} .
- En déduire T^n puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.17 (★★)

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique, notée \mathcal{B}_{can} .
- On pose $P_1 = (X + 1)^2$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = (X - 1)^2$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis donner la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} .
- En déduire la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base \mathcal{B} . En déduire la matrice de φ^n dans la base canonique.

Exercice 6.18 (★★)

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On note \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = AM - MA$.
 - (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Déterminer la matrice de φ dans la base \mathcal{B} puis dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 6.19 (★★)

On considère $F = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$ et $G = Vect(1, 1, 1)$.

- a)
 - (i) Déterminer une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3) de G .
 - (ii) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 . En déduire que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
- b) On considère p le projecteur sur F parallèlement à G .
 - (i) Déterminer la matrice de p dans la base \mathcal{B} .
 - (ii) En déduire la matrice de p dans la base canonique. On pourra pour cela s'aider du logiciel Scilab pour les calculs matriciels.
 - (iii) Donner $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.20 (★★★★)

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Trace

Exercice 6.21 (★★ - Trace d'un endomorphisme - \hookrightarrow)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit f un endomorphisme de E . Justifier que toutes les matrices représentatives de f ont la même trace. Cette valeur commune est appelée *trace de f* et notée $\text{Tr}(f)$.
2. Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et considérons l'application $u_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $u_A(M) = AM$.
 - (a) Montrer que u_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Calculer $\text{Tr}(u_A)$.
3. Soit p un projecteur de E . Montrer que $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.
4. **Application.**

- (a) Soit $0 \leq r \leq n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $\begin{cases} A^2 = A \\ \text{Tr}(A) = r \end{cases}$.

Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}$.

- (b) Montrer que $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.22 (★★)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n . On suppose que $\text{rg}(f) = \text{Tr}(f) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que f est un projecteur.

Exercice 6.23 (★★★★ - Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A(M) = \text{Tr}(AM)$.
Montrer que φ_A définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ définie par $\Phi(A) = \varphi_A$.
 - Montrer que Φ est linéaire.
 - Montrer que Φ est un isomorphisme.
Indication. On pourra calculer $\varphi_A(E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice (i, j) .
 - En déduire que pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.24 (★★★★★)

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(XY) = f(YX).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{Tr}$.

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 6.25 (★)

Déterminer un polynôme annulateur des endomorphismes suivants :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^t A + 2A \end{array}.$$

$$g : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \varphi(x)u + x \end{array} \quad \text{où } E \text{ est un espace vectoriel, } u \in E \text{ et } \varphi \text{ est une forme linéaire telle que } \varphi(u) = 1.$$

Exercice 6.26 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $2f^2 - 3f - 9\text{Id}_E = 0$.

On pose alors $u = 2f + 3\text{Id}_E$ et $v = f - 3\text{Id}_E$.

- Calculer $u - 2v$. En déduire que $E = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
- Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$.
- Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v)$.
- (Cubes) En déduire que f est diagonalisable.

Sous-espaces stables

Exercice 6.27 (★)

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $f \circ f = -\text{Id}_{\mathbb{R}^4}$.
- Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u, f(u))$ est stable par f .

- c) On pose $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = (0, 1, 0, 0)$ et $e_4 = f(e_3)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
- d) Déterminer la matrice M' de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B} .
-

Exercice 6.28 (★)

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E tels que F_i est stable par f pour tout $1 \leq i \leq n$.

Montrer que $F = \sum_{i=1}^n F_i$ est stable par f .

Exercice 6.29 (★★★★ - QSP HEC 2017)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , p un projecteur de E et u un endomorphisme de E .

Montrer que p et u commutent si et seulement si $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u .

Exercice 6.30 (★★★★ - Caractérisation des homothéties - 📄)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles.

- a) Montrer que $\forall x \neq 0_E, \exists! \lambda_x \in \mathbb{K} : f(x) = \lambda_x x$.
- b) Soient x et y deux vecteurs non nuls de E .
- (i) Montrer que si x et y sont liés, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
 - (ii) Montrer que si (x, y) est une famille libre, alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x$. En déduire que $\lambda_x = \lambda_y$.
- c) Déduire de ce qui précède que f est une homothétie.
-