TD7

Couples de variables aléatoires discrètes

Loi d'un couple, lois marginales et conditionnelles

Exercice 7.1 (★)

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lequel il existe un réel a tel que la loi de (X, Y) soit définie par : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([X=i]\cap[Y=j]) = \dfrac{1}{j!}\dfrac{a}{2^{i+j}}$.

a) Déterminer a.

b) Déterminer les lois marginales.

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.2 (★★)

On considère trois boîtes et une infinité de jetons. On place successivement chacun des jetons, au hasard dans l'une des trois boîtes. On suppose que chaque boîte est vide au départ et de capacité illimitée. On suppose également qu'à chaque fois qu'un jeton est placé, il l'est de façon équiprobable dans chaque boîte.
Soit Y (resp. Z) le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, deux boîtes exactement (resp. trois boîtes exactement) sont occupées par au moins un jeton.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la loi de Z sachant $[Y = k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la loi de Z et la loi du couple (Y, Z).

Exercice 7.3 (★★★ - QSP HEC 2014)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i]\cap[Y=j]) = \frac{a}{(i+j+1)!}.$$

Déterminer le réel a. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Fonctions de deux variables discrètes

Exercice 7.4 (★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Justifier que $\dfrac{X}{1+Y}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 7.5 (★★)

Soient X et Y deux variables indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $p \in]0,1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit une matrice $A(\omega)$ par :

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega)-1 \\ Y(\omega)-1 & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.

Exercice 7.6 (★★)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathscr{P}(\mu)$. Déterminer la loi de X sachant $[X+Y=n]$.

Exercice 7.7 (★★)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant la même loi $\mathscr{G}(p)$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X+Y$. Admet-elle une espérance ?

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = \sup(X,Y)$. Admet-elle une espérance ?

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $I = \inf(X,Y)$. Admet-elle une espérance ?

d) Montrer que la variable aléatoire SI admet une espérance et la calculer.

Exercice 7.8 (★★ - Minimum, maximum de lois uniformes)
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on effectue des tirages avec remise dans cette urne. On note X le numéro de la première boule extraite, et Y le numéro de la seconde. On note également I le plus petit des numéros tirés, et S le plus grand.

1. Donner la loi de I et de S.
2. Calculer $E(S)$, $E(I)$, puis $V(S)$ et $V(I)$.
3. Déterminer une relation liant X, Y, S et I. En déduire $V(S+I)$, puis le coefficient de corrélation linéaire de S et I.

Exercice 7.9 (★★★ - Somme de lois uniformes)
Soit $n \geq 1$, et X, Y des variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.
Déterminer la loi de $Z = X+Y$.
Pour le calcul $P(X+Y=k)$, on pourra distinguer les cas $k \leq n+1$ et $k > n+1$.

Exercice 7.10 (★★★ - QSP HEC 2012)
Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1,2\}$, $P(Y=1) = P(Y=2) = \dfrac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Covariance, corrélation linéaire

Exercice 7.11 (★)
Soit un couple (X,Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$X \backslash Y$	b_1	b_2	b_3
a_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
a_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

,

avec $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

1. Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{(a_1-a_2)(2b_1-b_2-b_3)}{25}$.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.12 (★ - ✍)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de Bernoulli.

a) Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) - P([X = 1])P([Y = 1])$.

b) Montrer que deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Exercice 7.13 (★)

Une urne contient r boules rouges, v boules vertes et b boules bleues. On tire n boules dans l'urne successivement et avec remise. On note R (resp. V, B) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (resp. vertes, bleues) tirées.

1. Reconnaître les lois de R, V, B. Déterminer une relation liant R, V et B.
2. Calculer $V(R + V)$, puis montrer que $\rho_{R,V} = -\sqrt{\dfrac{rv}{(b + r)(b + v)}}$. Que peut-on en déduire ?
3. Que peut-on dire si $b = 0$? Était ce prévisible ?

Exercice 7.14 (★★)

Soit $p \in]0, 1[$, et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = n] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \lambda(1 - p)^k & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
3. Quelle est la loi de $X + 1$? En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
4. Montrer que X et $Y - X$ suivent la même loi. En déduire $Cov(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.15 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules successivement et sans remise dans cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) ainsi que ses lois marginales.
2. Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n + 1)(3n + 2)}{12}$.
3. En déduire la covariance et le cœfficient de corrélation linéaire de X et Y.
4. Exprimer sous forme factorisée la variance $V(X + Y)$.

Exercice 7.16 (★★)

Soit $p \in]0; 1[$ et $n > 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur à une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

a) Déterminer la loi de X.

b) Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.

c) On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.

d) Calculer $Cov(X, Y)$. Les variables X etY sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.17 (★★)

On lance n dés équilibrés à 6 faces. On note X le nombre de numéros distincts qui sont sortis lors des n lancers, et pour tout $i \in \{1, \cdots, 6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si le numéro i est apparu.

1. Déterminer la loi des variables X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, déterminer la loi de $X_i X_j$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer $V(X)$.

Exercice 7.18 (★★)

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le cinéma comporte $N \geq 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

a) Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'événement $X = n$, puis la loi de X_i.

b) Déterminer, sans nouveaux calculs la loi de $X_1 + X_2$.

c) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

d) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X.

e) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.19 (★★★★ - Oral HEC 2014)

On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro sorti au n-ième tirage.
Les variables aléatoires X_n, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, on note T_i le temps d'attente de la sortie du numéro i.

1. (a) Donner la loi de T_1 ainsi que son espérance et sa variance.
   (b) Trouver l'espérance des variables aléatoires $\mathrm{Inf}(T_1, T_2)$ et $\mathrm{Sup}(T_1, T_2)$.
2. Justifier l'existence de la covariance de T_1 et de T_2, que l'on notera $\mathrm{Cov}(T_1, T_2)$.
3. (a) Établir, pour tout $i \in [\![2, 6]\!]$, la relation : $E(T_1 \mid [X_1 = i]) = 7$.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![3, 6]\!]$, on a : $E(T_1 T_2 \mid [X_1 = i]) = E((1 + T_1)(1 + T_2))$.
   (c) Calculer $E(T_1 T_2)$.
   (d) En déduire $\mathrm{Cov}(T_1, T_2)$ ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de T_1 et T_2.
4. (a) Trouver un réel α tel que les variables T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ soient non corrélées.
   (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(T_2 + \alpha T_1 \mid [T_1 = 1])$.
   (c) Les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ sont-elles indépendantes ?
