TD8

Intégrales généralisées

Intégration sur un segment

Exercice 8.1 (★)

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}(e^{k+n})^{\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$.

Commençons par un rappel :

Sommes de Riemann.

On pensera à une somme de Riemann lorsqu'on cherche la limite d'une suite (u_n) qui est une somme finie de n termes et que le terme général de cette somme dépend également de n. On procèdera alors ainsi :

- commencer par mettre $\frac{1}{n}$ en facteur, et identifier une fonction f **continue** sur $[0,1]$ de sorte que $u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$.
- Par le théorème des sommes de Riemann, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

On appliquer cette méthodes aux sommes considérées.

- On a pour tout $n\geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
où $f:x\in[0,1]\mapsto x$ est continue. Par le théorème des sommes de Riemann, on en déduit donc que :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2}=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$
- On a pour tout $n\geq 1$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(e^{k+n})^{\frac{1}{n}}&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}e^{\frac{k}{n}+1}=\frac{e}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}+\frac{e^2}{n}\\&==\frac{e}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(k/n)+\frac{e^2}{n}\end{aligned}$$
où $f:x\in[0,1]\mapsto e^x$ est continue. Par le théorème des sommes de Riemann, on en déduit donc que :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(e^{k+n})^{\frac{1}{n}}=e\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t+0=e(e-1).$$

- On a pour tout $n \geq 1$, en faisant un glissement d'indices :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \sin\frac{(j+n)\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{n}+\pi\right)$$
$$= -\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(j/n)$$
où $f : x \in [0,1] \mapsto \sin(x\pi)$ est continue. Par le théorème des sommes de Riemann, on en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = -\int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = -\left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi}.$$

Exercice 8.2 (★★★ - QSP ESCP 2018)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$
Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 8.3 (★★★★ - Oral ESCP 2013)
Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x=0$.
   On note $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\tilde{f}'(0)$.
6. La fonction $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

1. Posons $\phi : t \mapsto t+\sin(t)$. ϕ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :
$$\phi'(t) = 1+\cos(t) \geq 0$$
et nul si et seulement si $t \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, c'est à dire en des points isolés. Ainsi ϕ est strictement croissante, $\phi(0)=0$, donc ϕ s'annule une unique fois en 0.

   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t+\sin(t)}$ est continue sur $[x,2x]$ (ou $[2x,x]$ si $x<0$). Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. g étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$), elle admet une primitive G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$). On a donc pour tout $x>0$ (resp. $x<0$) :
$$f(x) = G(2x) - G(x).$$
   Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et on a pour tout $x>0$ (resp. $x<0$) :
$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{1+\sin(x)}.$$

3. Pour tout $x > 1$, pour tout $t \in [x, 2x]$, on a :
$$\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{t+\sin(t)} \leq \frac{1}{t-1}$$
d'où par croissance de l'intégrale (sur un segment) :
$$\ln(\frac{2x+1}{x+1}) = \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_x^{2} x\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \ln(\frac{2x-1}{x-1}).$$
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{2x+1}{x+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{2x-1}{x-1}) = \ln(2)$. Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut $\ln(2)$.

Notons également que la fonction g est impaire. Pour tout $x \neq 0$, on a donc par changement de variable $u = -t$:
$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} g(-u)(-\,\mathrm{d}u) = \int_x^{2x} g(u)\,\mathrm{d}u = f(x)$$
Donc f est une fonction paire. On en déduit en particulier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$.

4. **Au brouillon.** Quand $t \to 0$, on a :
$$t + \sin(t) = t + t + o(t) = 2t + o(t)$$
donc $\dfrac{1}{t+\sin(t)} \sim_0 \dfrac{1}{2t}$ Et donc $f(x) \approx \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \frac{1}{2}\ln(\frac{2x}{x}) = \frac{1}{2}\ln(2)$. Essayons à présent de justifier ces égalités.

Solution. On a :
$$f(x) - \frac{1}{2}\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)} - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \int_x^{2x} \underbrace{\frac{t-\sin(t)}{2t(t+\sin(t))}}_{=h(t)}\,\mathrm{d}t$$
La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Et on a à l'aide d'un développement limité en 0 :
$$2t(t+\sin(t)) \sim_0 4t^2 \text{ et } t - \sin(t) \sim_0 \frac{t^3}{6}.$$
Ainsi on a $h(t) \sim_0 \dfrac{t}{24}$. En particulier les intégrales $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 h(t)\,\mathrm{d}t$ sont faussement impropres et convergent. On en déduit pour $x > 0$:
$$f(x) - \frac{1}{2}\ln(2) = \int_x^{2x} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \int_{2x}^1 h(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
De même on montre que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) - \dfrac{1}{2}\ln(2) = 0$.

On peut donc conclure que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = \dfrac{1}{2}\ln(2)$

5. On a déjà calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$. Après réduction au même dénominateur, on a pour tout $x \neq 0$:
$$f'(x) = \frac{2\sin(x)(1-\cos(x))}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))}.$$
À l'aide d'un développement limité au voisinage et d'équivalents usuels, on montre que $f'(x) \sim_0 \dfrac{x}{8}$. On est donc dans la situation suivante :

La fonction $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et on a $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = 0$

Par le théorème de passage à la limite sur la dérivée, on en déduit que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a $\tilde{f}'(0) = 0$.

6. On vient de voir que $\tilde{f}$ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par le théorème de passage à la limite sur la dérivée.

Nature d'une intégrale généralisée

Exercice 8.4 (★★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_1^{+\infty} e^{-\pi t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}} \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t)-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8.5 (★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, et en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{1/2} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8.6 (★)

Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8.7 (★★ - Exemple d'intégrale généralisée semi-convergente)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = 2$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = +\infty$.

   (d) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge mais ne converge pas absolument. Elle est dite *semi-convergente*.

1. Soit $A > \pi$, on fait une intégration par parties sur le segment $[\pi, A]$:

$$\begin{array}{c|ccc} + & \frac{1}{t} & \searrow & \sin(t) \\ - & -\dfrac{1}{t^2} & \xleftarrow{\int} & -\cos(t) \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi, A]$. Par IPP, on a :

$$\begin{aligned}\int_\pi^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_\pi^A - \int_\pi^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{\cos(\pi)}{\pi} - \frac{\cos(A)}{A} - \int_\pi^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\cos(A)}{A} = 0$ comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0. De plus on a :

- pour tout $t \geq \pi$:
$$0 \leq \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$
- $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ avec un exposant >1.

Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge. Ainsi la limite :

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos(\pi)}{\pi} - \frac{\cos(A)}{A} - \int_\pi^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

existe et est finie, donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_\pi^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ aussi. On peut donc conclure que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par la relation de Chasles :

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t.$$

De plus pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ $t \in [(k-1)\pi, k\pi]$, on a $\dfrac{|\sin(t)|}{t} \geq \dfrac{|\sin(t)|}{k\pi}$, d'où par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t.$$

D'où finalement l'inégalité :

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t.$$

(b) La fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ étant π-périodique, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

car sin est positif sur $[0, \pi]$. Enfin on a :

$$\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^\pi = 2.$$

D'où le résultat.

(c) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi}.$$

Or on a $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k\pi}$ car la série $\sum\frac{1}{k}$ est divergente. Par théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=+\infty.$$

Par suite, l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 8.8 (★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence en utilisant les changements de variable indiqués entre parenthèses.

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (\text{poser } t=\ln x)\ \ ;\ \ \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t\ \ (\text{poser } u=e^t)$$

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{u(1-\ln u)^2}\,\mathrm{d}u\ \ (\text{poser } u=e^x)\ \ ;\ \ \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x\ \ (\text{poser } u=\sqrt{x})$$

Exercice 8.9 (★)

Étudier la nature des intégrales suivantes (on utilisera si nécessaire un changement de variable affine).

$$\int_{-\infty}^{0}x^2e^x\,\mathrm{d}x\ \ ;\ \ \int_{0}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\ \ ;\ \ \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t\ \ ;\ \ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+12x}.$$

Exercice 8.10 (★★)

1. (a) À l'aide du changement de variable $y=\frac{1}{x}$, montrer que les intégrales $\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ et $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ convergent et sont de valeurs opposées.

   (b) Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$?

2. Soit $a>0$. À l'aide d'un changement de variable, prouver la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 8.11 (★★ - Étude d'un reste)

Soit f la fonction définie pour tout $x\in]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_{x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie, préciser ses variations et ses limites en $+\infty$ et en 0.

2. (a) Montrer que pour tout $x>0$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}-\int_{x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que pour tout $x>0$,
   $$\frac{e^{-x}}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\le f(x)\le\frac{e^{-x}}{x}.$$

   (c) Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. (a) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$, l'intégrale $g(x)=\int_{x}^{1}\frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

   (b) Montrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0.

   (c) En déduire que $f(x)\underset{0}{\sim}-\ln x$.

4. Soit φ la fonction définie pour tout $x\in]1,+\infty[$ par $\varphi(x)=\int_{\ln x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 8.12 (★★★★ - QSP ESCP 2016)
Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

> Notons pour commencer qu'il n'est pas possible d'utiliser la majoration $\dfrac{f(t)}{t} \leq f(t)$ car f n'est pas forcément positive, ce qui exclu également d'utiliser les théorèmes de comparaison.
>
> L'astuce ici est d'utiliser une intégration par parties. Pour cela, f étant continue sur $[1,+\infty[$, on note F l'unique primitive de f sur cet intervalle s'annulant en 1, c'est à dire $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $x > 1$, on a :
>
> $$\begin{array}{c|ccc} + & \frac{1}{t} & & f \\ & & \searrow & \\ - & -\frac{1}{t^2} & \xleftarrow{\int} & F \end{array}$$
>
> Les fonctions F et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, on obtient :
>
> $$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
>
> Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, F admet une limite finie en $+\infty$, qu'on notera ℓ. Donc on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.
>
> D'autre part, on a par définition de la limite (avec $\varepsilon = 1$) :
>
> $$\exists A > 1, \quad \forall t \geq A, \quad \ell - 1 \leq F(t) \leq \ell + 1.$$
>
> Ainsi en posant $M = \max(|\ell - 1|, |\ell + 1|)$, on a pour tout $t \geq A$, $|F(t)| \leq M$. On en déduit donc que
>
> $$\left|\frac{F(t)}{t^2}\right| \leq \frac{M}{t^2}$$
>
> Par théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge. Il en est donc de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.
>
> On peut donc conclure que $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, de sorte que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Suites et fonctions définies par des intégrales généralisées

Exercice 8.13 (★★)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^{x+2}}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8.14 (★★)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument. *Ainsi, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.*
2. Montrer que f est paire et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \Gamma(1/2)$.
3. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b|$.
   (b) En déduire que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{\Gamma(1/2)}{2}|x - x_0|$.
   (c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.15 (★★)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$.

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2} I_n$.
4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

Comparaison série intégrale

Exercice 8.16 (★★ - Théorème de comparaison série/intégrale - ✍)

On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur $[1, +\infty[$. On pose pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

1. On montre dans cette partie que (u_n) et (v_n) sont de même nature (*Théorème de comparaison série-intégrale*).
   (a) Justifier que pour tout $1 \leq k \leq n-1$,
   $$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k).$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - f(1) \leq u_n \leq v_{n-1}$.
   (c) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature.
2. **Application. Étude de la série de Bertrand $S = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$.**
   (a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors la série S diverge.
   (b) On suppose $\beta > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\beta}$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$.
   On effectuera le changement de variable $u = \ln(t)$.
   (c) Conclure que S converge si et seulement si $\beta > 1$.

> A modifier
>
> 1. (a) Puisque f est décroissante, on a pour tout $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout $t \in [k, k+1]$:
> $$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

D'où par croissance de l'intégrale :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k).$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on somme ces inégalités pour tout $1 \leq k \leq n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

soit encore :

$$v_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = u_n \leq v_{n-1}.$$

(c) Puisque f est positive, les suites (u_n) et (v_n) sont monotones. Elles convergent donc si et seulement si elles sont majorées.

- Supposons que (u_n) converge, alors elle est majorée par un réel $M > 0$. Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n \leq f(1) + u_n \leq f(1) + M$$
Ainsi (v_n) est majorée, elle converge donc.
- Supposons cette fois que (v_n) converge. Alors elle est majorée par $N > 0$, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n \leq v_n \leq N.$$
(u_n) est donc croissante majorée, elle converge donc.

On a donc montré que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge. Ces suites sont donc de même nature.

2. (a) Supposons $\alpha > 1$. On cherche alors $\gamma > 1$ tel que :

$$\frac{n^\gamma}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln(n)^\beta} \to 0.$$

C'est à dire $1 \leq \gamma < \alpha$. Or un tel réel existe bien puisque $\alpha > 1$: il suffit de prendre $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$.
On obtient donc :

- $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$;
- $\dfrac{1}{n^\gamma} > 0$;
- $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ converge comme somme de Riemann avec $\gamma > 1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que S converge si $\alpha > 1$.

(b) Supposons $\alpha < 1$. On cherche cette fois $\gamma < 1$ tel que :

$$\frac{n^\gamma}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{\ln(n)^\beta} \to +\infty.$$

C'est à dire $1 \geq \gamma > \alpha$. Or un tel réel existe bien puisque $\alpha < 1$: il suffit de prendre $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$.
On obtient donc :

- $\dfrac{1}{n^\gamma} = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$;
- $\dfrac{1}{n^\gamma} > 0$ et $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} > 0$;
- $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ diverge comme somme de Riemann avec $\gamma < 1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que S diverge si $\alpha < 1$.

(c) On suppose que $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$. Alors on a pour tout $n \geq 3$:

$$\frac{1}{n\ln(n)^\beta} = \frac{\ln(n)^{-\beta}}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

La série harmonique étant divergente, on en déduit par théorème de comparaison que S diverge dans ce cas.

(d) i. On pose $u = \varphi(t) = \ln(t)$. φ est strictement croissante et $\mathscr{C}^1$ sur $]2, +\infty[$. De plus on a $u : \ln(2) \to +\infty$ lorsque $t : 2 \to +\infty$, $t = e^u$ et $\mathrm{d}t = e^u\,\mathrm{d}u$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\beta}$ est de même nature que l'intégrale :

$$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{e^u\,\mathrm{d}u}{e^u(u)^\beta} = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u)^\beta}.$$

Or cette intégrale converge si et seulement si $\beta > 1$ comme intégrale de Riemann en $+\infty$.

ii. Ainsi lorsque $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, S converge si et seulement si $\beta > 1$.

On peut donc conclure que la série de Bertrand $S = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Fonction Gamma

Exercice 8.17 (★★ - Valeur de Γ aux demi-entiers)

1. Justifier la convergence et déterminer la valeur de intégrales $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Exercice 8.18 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer I_0 et I_1.
3. À l'aide du changement de variable $y = x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n$.
5. Exprimer I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur en fonction des cœfficients de P.

Exercice 8.19 (★★★★ - Étude de la fonction Gamma)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \frac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geq 2^{x-1}\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} \Gamma(x)$.
3. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_t : x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la fonction f_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f_t' et f_t''.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t,x)$$

où

$$M_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t} t^x & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(c) Justifier la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} \,\mathrm{d}t \ , \ \int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} \,\mathrm{d}t \ \text{ et } \ \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^x \,\mathrm{d}t.$$

(d) En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x) \,\mathrm{d}t.$$

(e) À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
On ne cherchera pas à déterminer α.

4. (a) Soit $t > 0$, montrer que la fonction f_t est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Dresser le tableau de variation de la fonction Γ et tracer sa courbe représentative.

1. On a pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \displaystyle\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$ car $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est une fonction positive. Comme de plus $e^{-t} \geq e^{-1}$ pour tout $t \in]0,1]$, et que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} \,\mathrm{d}t$ converge car $x > 0$, on obtient que :

$$\Gamma(x) \geq \int_0^1 t^{x-1} e^{-1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{e} \int_0^1 t^{x-1} \,\mathrm{d}t.$$

On a puisque $x \neq 0$:

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x} \right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{x}.$$

On obtient donc pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \dfrac{1}{ex}$. Puisque $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{ex} = +\infty$, on en déduit par théorème de comparaison que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \Gamma(x)$ existe et vaut $+\infty$.

2. Soit $x > 1$, on a $\Gamma(x) \geq \displaystyle\int_2^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$ toujours puisque $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est une fonction positive. Comme de plus $t^{x-1} \geq 2^{x-1}$ pour tout $t \in [2, +\infty[$ car $x > 1$, et que $\displaystyle\int_2^{+\infty} 2^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence), on obtient que :

$$\Gamma(x) \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2^{x-1} = \lim_{x \to +\infty} e^{(x-1)\ln(2)} = +\infty$, on en par théorème de comparaison que :

$$\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) \text{ existe et vaut } +\infty.$$

3. (a) On fixe $t \in \mathbb{R}_+^*$ et on regarde le caractère $\mathscr{C}^2$ en x de la fonction :

$$f_t : x \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t}.$$

La fonction exponentielle étant $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_t est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a pour tout $x > 0$:

$$f_t'(x) = \ln(t)e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \quad \text{et} \quad f_t''(x) = \ln(t)^2e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}.$$

(b) On applique la formule de Taylor Lagrange entre x et $x+h$ à f_t qui est $\mathscr{C}^2$:

Rappel. *Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n*
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel M sur I. Alors pour tout $(a,x) \in I^2$, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Pour appliquer cette formule, il nous faut majorer $|f_t''(u)|$ quand u est compris entre x et $x+h$: on a :

$$|f_t''(u)| = \ln(t)^2t^{u-1}e^{-t} = \ln(t)^2e^{(u-1)\ln(t)}e^{-t}$$

On a deux cas à étudier :

- Si $t \geq 1$, alors $u \mapsto e^{(u-1)\ln(t)}$ est croissante. Comme $|h| \leq 1$, on a :

  $$u \leq x + |h| \leq x + 1.$$

  on en déduit dans ce cas que :

  $$|f_t''(u)| \leq \ln(t)^2e^{(x+1-1)\ln(t)}e^{-t} = \ln(t)^2t^xe^{-t}.$$

- Si $t < 1$, alors $u \mapsto e^{(u-1)\ln(t)}$ est décroissante. Comme $|h| \leq \frac{x}{2}$, on a :

  $$u \geq x - |h| \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

  On en déduit dans ce cas que :

  $$|f_t''(u)| \leq \ln(t)^2e^{(\frac{x}{2}-1)\ln(t)}e^{-t} = \ln(t)^2t^{\frac{x}{2}-1}e^{-t}.$$

Posons $M_2(t,x)$ ce réel. On obtient alors en appliquant la formule de Taylor Lagrange ici : On obtient ici :

$$|f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)| \leq \frac{h^2}{2}M_2(t,x).$$

On obtient finalement l'inégalité voulue en divisant par $|h| \neq 0$:

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leq \frac{|h|}{2}M_2(t,x).$$

(c) Montrons la convergence de chacune de ces intégrales.

Intégrale $\int_0^{+\infty}(\ln t)e^{-t}t^{x-1}\,dt$ *:* la fonction $t \mapsto (\ln t)e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Donc cette intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

En 0 :

- $(\ln t)e^{-t}t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)$ puisque

  $$t^{1-\frac{x}{2}} \times (\ln t)e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}\ln(t)t^{\frac{x}{2}} \underset{t\to 0}{\to} 0$$

  par croissances comparées (avec $x > 0$) ;
- $\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}} \geq 0$ au voisinage de 0^+;

- $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1 - \frac{x}{2} < 1$)

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 (\ln t) e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$ converge

En $+\infty$:

- $(\ln t) e^{-t} t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puisque
$$t^2 \times (\ln t) e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} \ln(t) t^{x+1} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$$
par croissances comparées ;
- $\frac{1}{t^2} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$ converge.
On conclut donc que $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$ converge bien.

Intégrale $\int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} \, dt$ *:* la fonction $t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1}$ est continue sur $]0, 1]$. Donc cette intégrale est impropre en 0.

En 0 :

- $(\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}}\right)$ puisque
$$t^{1-\frac{x}{4}} \times (\ln t) e^{-t} t^{x/2-1} = e^{-t} \ln(t) t^{\frac{x}{4}} \underset{t \to 0}{\to} 0$$
par croissances comparées (avec $x > 0$) ;
- $\frac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}} \geq 0$ au voisinage de 0^+;
- $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1 - \frac{x}{4} < 1$)

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} \, \mathrm{d}t$ converge.

Intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^x \, dt$ *:* la fonction $t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t} t^x$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc cette intégrale est impropre en $+\infty$.

En $+\infty$:

- $(\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puisque
$$t^2 \times (\ln t) e^{-t} t^x = e^{-t} \ln(t) t^{x+2} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$$
par croissances comparées ;
- $\frac{1}{t^2} \geq 0$ au voisinage de 0^+;
- $\int_0^1 \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^x \, \mathrm{d}t$ converge.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$. D'après ce qui précède, on a :
$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t, x)$$
où
$$M_2(t, x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t} t^x & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

De plus on vient de montrer, en utilisant de plus la linéarité de l'intégrale, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\mathrm{d}t$ converge. On en déduit par comparaison que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge, et on a :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \mathrm{d}t \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\mathrm{d}t$$

Montrons à présent que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2,1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f_t(x+h)\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f_t(x)\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right|\mathrm{d}t \\
&\text{par inég. triang. (intég. abs. conv.)} \\
&\leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\leq \displaystyle\frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\mathrm{d}t$ est indépendante de h. On en déduit par théorème d'encadrement en faisant tendre h vers 0 que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient finalement que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$

(e) On sait que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier $\Gamma(1) = 0! = 1! = \Gamma(2)$.
La fonction Γ est continue sur $[1,2]$ (on vient de voir qu'elle est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$), dérivable sur $]1,2[$. Comme de plus $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, on en déduit par le théorème de Rolle qu'il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

4. (a) On rappelle les caractérisations suivantes d'une fonction convexe :

Rappel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ est convexe } &\Leftrightarrow \forall x,y \in I, \forall\lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \\
&\Leftrightarrow f \text{ est au dessus de ses tangentes} \\
&\Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) \geq 0
\end{aligned}$$

Ici on a vu que pour tout $t > 0$, f_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$\forall x > 0, \quad f_t''(x) = (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t} > 0.$$

Ainsi f_t est bien convexe.

(b) Pour tout $t > 0$, f_t est convexe. Ainsi pour tout $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_t(1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f_t(x)+\lambda f_t(y).$$

Intégrons alors cette relation entre 0 et $+\infty$ (possible car tout converge ici) :

$$\int_0^{+\infty} f_t((1-\lambda)x+\lambda y)\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} (1-\lambda)f_t(x)+\lambda f_t(y)\mathrm{d}t.$$

On obtient ainsi (en utilisant la linéarité de l'intégrale, possible ici car tout converge) :

$$\Gamma(1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)\int_0^{+\infty} f_t(x)\mathrm{d}t + \lambda\int_0^{+\infty} f_t(y)\mathrm{d}t = (1-\lambda)\Gamma(x)+\lambda\Gamma(y).$$

Ainsi on a bien montré que Γ est convexe.

3. De tout ce qu'on a fait, on obtient le tableau de variation de Γ suivant :

x	0		α		$+\infty$
$\Gamma'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\Gamma(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors tracer la représentation graphique de la courbe de Γ.