

Intégrales généralisées

Intégration sur un segment

Exercice 8.1 (★)

Déterminer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (e^{k+n})^{\frac{1}{n}}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

Exercice 8.2 (★★★ - QSP ESCP 2018)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 8.3 (★★★★ - Oral ESCP 2013)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f .
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x = 0$.

On note \tilde{f} la fonction ainsi prolongée.

5. Montrer que \tilde{f} est dérivable sur \mathbb{R} . Calculer $\tilde{f}'(0)$.
6. La fonction \tilde{f} est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

Nature d'une intégrale généralisée

Exercice 8.4 (★★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_1^{+\infty} e^{-\pi t} dt ; \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+2t)\sqrt{t}} ; \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t \ln t)^2} dt ; \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; \int_0^{+\infty} \frac{1 + \sin(x^2)}{x^2} dx ; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t} dt ; \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}} dt ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t) - \sin(t)} dt$$

Exercice 8.5 (★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, et en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt ; \int_0^{1/2} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt ; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{1+t^2} dt ; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \ln(t^2)}{1+t^4} dt ; \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right) \frac{1}{t} dt.$$

Exercice 8.6 (★)

Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx ; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} e^{-1/t} dt ; \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

Exercice 8.7 (★★ - Exemple d'intégrale généralisée semi-convergente)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt$.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = 2$.

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty$.

(d) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

Ainsi, l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge mais ne converge pas absolument. Elle est dite *semi-convergente*.

Exercice 8.8 (★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence en utilisant les changements de variable indiqués entre parenthèses.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ (poser } t = \ln x) ; \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + 1} dt \text{ (poser } u = e^t)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{u(1 - \ln u)^2} du \text{ (poser } u = e^x) ; \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx \text{ (poser } u = \sqrt{x})$$

Exercice 8.9 (★)

Étudier la nature des intégrales suivantes (on utilisera si nécessaire un changement de variable affine).

$$\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx ; \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} ; \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{5}{2}}} dt ; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 12x}.$$

Exercice 8.10 (★★)

1. (a) À l'aide du changement de variable $y = \frac{1}{x}$, montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

convergent et sont de valeurs opposées.

(b) Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$?

2. Soit $a > 0$. À l'aide d'un changement de variable, prouver la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx$.

Exercice 8.11 (★★ - Étude d'un reste)

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie, préciser ses variations et ses limites en $+\infty$ et en 0.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.
 (b) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$\frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$
 (c) Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $g(x) = \int_x^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$ est bien définie.
 (b) Montrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0.
 (c) En déduire que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$.
4. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in]1, +\infty[$ par $\varphi(x) = \int_{\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
 Montrer que φ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 8.12 (★★★★ - QSP ESCP 2016)

Soit f une fonction continue sur $]1, +\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge également.

Suites et fonctions définies par des intégrales généralisées

Exercice 8.13 (★★)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + t^{x+2}}} dt$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8.14 (★★)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt) dt$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument. Ainsi, f est une fonction définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est paire et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \Gamma(1/2)$.
3. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b|$.
 (b) En déduire que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\Gamma(1/2)}{2} |x - x_0|$.
 (c) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 8.15 (★★)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$.

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
 2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
 3. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} I_n$.
 4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
-

Comparaison série intégrale**Exercice 8.16 (★★ - Théorème de comparaison série/intégrale - 🐞)**

On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur $[1, +\infty[$. On pose pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = \int_1^n f(t) dt \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

1. On montre dans cette partie que (u_n) et (v_n) sont de même nature (*Théorème de comparaison série-intégrale*).

(a) Justifier que pour tout $1 \leq k \leq n-1$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - f(1) \leq u_n \leq v_{n-1}$.

(c) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature.

2. **Application. Étude de la série de Bertrand** $S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$.

(a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors la série S diverge.

(b) On suppose $\beta > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta}$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$.

On effectuera le changement de variable $u = \ln(t)$.

(c) Conclure que S converge si et seulement si $\beta > 1$.

Fonction Gamma**Exercice 8.17 (★★ - Valeur de Γ aux demi-entiers)**

1. Justifier la convergence et déterminer la valeur de intégrales $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}} e^{-t} dt$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
-

Exercice 8.18 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer I_0 et I_1 .
3. À l'aide du changement de variable $y = x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.
5. Exprimer I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ converge et déterminer sa valeur en fonction des coefficients de P .

Exercice 8.19 (★★★★ - Étude de la fonction Gamma)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^1 t^{x-1} dt$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t} dt$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$.
3. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_t : x \mapsto t^{x-1} e^{-t}$.
 - (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la fonction f_t est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et calculer f_t' et f_t'' .
 - (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t, x)$$

où

$$M_2(t, x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t} t^x & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- (c) Justifier la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^x dt.$$

- (d) En déduire que Γ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x) dt.$$

- (e) À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

On ne cherchera pas à déterminer α .

4. (a) Soit $t > 0$, montrer que la fonction f_t est convexe sur \mathbb{R}_+^* .
(b) En déduire que la fonction Γ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .
5. Dresser le tableau de variation de la fonction Γ et tracer sa courbe représentative.