

## Valeurs propres, vecteurs propres

### Valeurs propres, vecteurs propres

#### Exercice 9.1 (★)

On considère l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad u(P) = (X^2 + 1)P'' + 2XP'.$$

1. Justifier que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Montrer que 1 et  $X$  sont des vecteurs propres de  $u$ . À quelles valeurs propres sont-ils associés ?
3. Montrer que 6 est une valeur propre de  $u$ .
4.  $u$  admet-il d'autres valeurs propres ? Déterminer les sous-espaces propres de  $u$ .
5. Déterminer une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

#### Exercice 9.2 (★)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_3 = \begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$  où  $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ .

1. Montrer que  $j^3 = 1$  et que  $1 + j + j^2 = 0$ .
2. Calculer  $AX_k$  pour tout  $k = 1, 2, 3$ . En déduire les éléments propres de  $A$ .
3. Déterminer une matrice  $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

#### Exercice 9.3 (★)

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par  $f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(X - 1) - 2P(1)(X - 1)^2$ .

On pose  $Q_1 = 1$ ,  $Q_2 = X - 1$  et  $Q_3 = \frac{1}{2}(X - 1)^2$ .

1. Vérifier que  $f$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Montrer que  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et déterminer la matrice de  $f$  dans cette base.
3. Montrer que 2 et  $-2$  sont des valeurs propres de  $f$  et déterminer les dimensions des sous-espaces propres  $E_2$  et  $E_{-2}$  associés.
4. L'endomorphisme  $f$  peut-il admettre d'autres valeurs propres ?
5. Montrer que  $E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}_2[X]$  et déterminer une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  où la matrice de  $f$  est diagonale.

#### Exercice 9.4 (★)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et  $x \in E$ ,  $x \neq 0_E$ . Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Vect}(x) \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ est un vecteur propre de } f$$

#### Exercice 9.5 (★★ - Matrices stochastiques - D'après EML 2010 - 📄)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Soit  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer  $AV$  et en déduire une valeur propre de  $A$ .

2. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ , et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que

$$|x_i| = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|.$$

- (a) Montrer que  $|\lambda x_i| \leq |x_i|$ .
- (b) En déduire que  $|\lambda| \leq 1$ , et que  $Sp(A) \subset [-1, 1]$ .

### Exercice 9.6 (★★★ - QSP HEC 2012)

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $T$  l'application qui à toute fonction  $f \in E$  associe la fonction  $F = T(f)$  définie par :  $F(0) = f(0)$  et  $\forall x > 0, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels  $\lambda$  et les fonctions  $f$  vérifiant  $T(f) = \lambda f$ .

### Exercice 9.7 (★★★★ - QSP HEC 2014)

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de  $f$  ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$  ?
4. Combien existe-t-il de plans vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$  ?

## Recherche des éléments propres

### Exercice 9.8 (★)

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes (on les étudiera dans  $\mathbb{C}$  et dans  $\mathbb{R}$  lorsque cela a un sens). On pourra vérifier ses calculs sur **Scilab** à l'aide de la commande `spec(A)` qui donne les valeurs propres d'une matrice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 9.9 (★)

Considérons les matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  et  $B$  ont même rang, même trace, mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
2. Calculer  $(A - 2I_4)^2$  et  $(B - 2I_4)^2$ . En déduire que les matrices  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

**Exercice 9.10 (★)**

Déterminer sans calcul les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

---

**Exercice 9.11 (★)**

Soit  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie par  $f \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$ . Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et déterminer ses éléments propres.

---

**Exercice 9.12 (★★ - 📌)**

Soit  $n \geq 2$  et soit  $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dont tous les coefficients valent 1.

- Déterminer  $\text{Sp}(J_n)$ .
  - Montrer que  $J_n$  est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.
- 

**Exercice 9.13 (★★)**

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et soit  $a$  un réel non nul. On note  $f$  l'application définie sur  $E$  par  $f(P) = (X - a)P'$

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - Écrire la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $E$ . En déduire que  $f$  admet  $n + 1$  valeurs propres distinctes que l'on notera  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ .
  - Soit  $P_k$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ .
    - Déterminer  $\deg(P_k)$ .  
*Indication.* On identifiera le coefficient dominant dans l'égalité  $f(P_k) = \lambda_k P_k$ .
    - On note  $r_k$  l'ordre de multiplicité de  $a$  en tant que racine de  $P_k$ , et  $Q_k$  tel que  $P_k = (X - a)^{r_k} Q_k$ . Déterminer  $r_k$  et en déduire le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ .
- 

**Exercice 9.14 (★★★)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{tr}(A) \neq 0$  et soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$ .

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - Déterminer les valeurs propres de  $f$  et la dimension des sous-espaces propres associés.
- 

**Valeurs propres et polynômes annulateurs****Exercice 9.15 (★)**

1. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^4 - 3A^3 + 4A$ , et en déduire les éléments propres de  $A$ .

2. Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Chercher un polynôme annulateur de  $B$ . En déduire le spectre de  $B$ .

---

**Exercice 9.16 (★★ - Matrices compagnons - 📌)**

Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , qu'on note  $P = X^3 - a_2X^2 - a_1X - a_0$ .

On appelle *matrice compagnon du polynôme  $P$*  la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $P$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$  si et seulement si  $\lambda$  est une racine de  $P$ .
3. Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\text{rg}(M - \lambda I_3) \geq 2$ . En déduire que chaque sous-espace propre de  $M$  est de dimension 1.
4. **Exemples.** Déterminer un polynôme annulateur et les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9.17 (★★★ - QSP HEC 2015)**

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Établir l'existence d'un polynôme  $P$  non nul tel que  $P(f) = 0$ .
2. Soit  $Q$  un polynôme tel que  $Q(f) = 0$  et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que  $P(f) = 0$ . Montrer que toute racine de  $Q$  est valeur propre de  $f$ .
3. On suppose que  $f$  ne possède que 0 comme valeur propre. Montrer que  $f$  est nilpotente.

**Exercice 9.18 (★★★★ - Oral ESCP 2012)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes.

1. Montrer que la famille  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  est libre.  
*Indication : On pourra commencer par remarquer que si  $P$  est un polynôme annulateur non nul de  $A$ , alors  $\deg(P) \geq n$ .*
2. On note  $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de dimension supérieure ou égale à  $n$ .
3. Montrer qu'il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  et une matrice  $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  diagonale telle que :

$$A = P\Delta P^{-1}.$$

4. Soit  $M \in \mathcal{C}$ . Montrer que tout vecteur propre de  $A$  est un vecteur propre de  $M$ .  
En déduire que la matrice  $P^{-1}MP$  est diagonale.  
En déduire que  $\mathcal{C}$  est de dimension inférieure ou égale à  $n$ .
5. Montrer que  $(I, A, \dots, A^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{C}$ .
6. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), M^2 = A\}$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{R} \subset \text{Vect}(I, A)$ .
  - (b) Montrer que  $\mathcal{R}$  est de cardinal 4, et déterminer les 4 matrices  $M$  vérifiant  $M^2 = A$ .