ECS2

Exercices de colle de la semaine 1

Exercice 1.1

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

2. Montrer que $\dfrac{1}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$.

   En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 1.2

Soit α un réel donné. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier suivant les valeurs de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. En cas de convergence, on précisera la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

   On pourra pour cela faire apparaitre une somme de Riemann.

2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

3. Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$. Étudier suivant les valeurs du réel α, la convergence de la série de terme général $u_n x^n$.

Exercice 1.3

Soit n un nombre supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que M^k est la matrice nulle.

1. (a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ? Que dire de son rang ?
   (c) Que dire d'une matrice nilpotente semblable à une matrice diagonale ?

2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente M le plus petit entier strictement positif k tel que M^k est la matrice nulle.

   Le programme `Scilab` suivant, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```
A = input("Entrer une matrice nilpotente")
k = 1
B = A
while sum(abs(B))>0
      k = ?? ;
      B = ?? ;
end;
disp( ?? )
```

   (a) Expliquer en détail la ligne de code `while sum(abs(B))>0`.
   (b) Compléter le code du programme.
