ECS2

Exercices de colle de la semaine 10

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

Soit Z une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose $X = e^Z$.

1. On suppose que Z suit la loi normale centrée réduite.
   On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* 0 *et* 1.
   (a) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X.
   (b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que X^α admet une espérance et déterminer $E(X^\alpha)$.
   (c) En déduire que X admet une espérance et une variance et les déterminer.
2. On suppose maintenant que Z suit la loi normale de paramètres m et σ^2 (où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$).
   On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* m *et* σ^2.
   (a) Montrer que la variable aléatoire $X^* = (e^{-m}X)^{\frac{1}{\sigma}}$ suit la loi log-normale de paramètres 0 et 1.
   (b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 2

Soit $a > 0$ et soit $f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f_a est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f_a pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   (b) X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
   (c) On pose $Y = \ln(X)$. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis reconnaître la loi de Y.

Exercice 3

On considère, pour tout polynôme P, Q à cœfficients réels :

$$\Phi(P,\, Q) = (PQ)(0) + \int_{-1}^{1} P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   On note désormais $\langle P, Q\rangle = \Phi(P, Q)$.
2. Déterminer $\langle X^p, X^q\rangle$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
3. Montrer que la famille $(1, X, X^2, X^3 - X)$ est une famille orthogonale.
4. En déduire une famille orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est également une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Colle de 18h à 19h

Exercice 4

On considère la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 2te^{-t^2} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire à densité T qui admet f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de T.
3. Déterminer le réel μ, appelé médiane de T, tel que $P(T \leq \mu) = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que T admet une espérance et une variance et les déterminer.
5. On pose $Y = -2T$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.
6. On pose $Z = T^2$. Montrer que Z suit une loi usuelle que l'on déterminera.

Exercice 5

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $c_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $s_k : t \mapsto \sin(kt)$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant :
$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$
2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\mathrm{d}t$.
   (b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $t \in [-\pi, \pi]$.
   Écrire $\cos(mt)\cos(nt)$ et $\sin(mt)\sin(nt)$ comme une somme de deux cosinus.
3. (a) Déterminer la norme de c_k et de s_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots, c_n, s_n)$ est orthogonale.
   (c) En déduire une famille orthonormale de E.
