ECS2

Exercices de colle de la semaine 10

Colle du Lundi 2 Décembre

Exercice 1

On pose $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. (a) On pose $Y = X - a$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on déterminera.
   (b) En déduire que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.

4. On pose $Z = e^X$.
   (a) Montrer que Z n'admet pas d'espérance.
   (b) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 2

Soit α et a des réels strictement positifs et x_0 et λ des réels.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathbb{1}_{]x_0+a,+\infty[}\lambda\left(\dfrac{a}{x-x_0}\right)^{\alpha+1}$.

1. (a) Déterminer λ pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X.
   On dit alors que X *suit la loi de Pareto de paramètres* α*,* a *et* x_0.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (c) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $E(X)$.
   (d) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $V(X)$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètres α, a et x_0. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = rX + s$.

3. (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Soit $\beta > 0$ et $\gamma > 1$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \beta\gamma^X$.
   (b) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètres α, a et 0. Soit $c > 0$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire Z^c.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $c_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $s_k : t \mapsto \sin(kt)$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant : $\forall f, g \in E, \quad \langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\mathrm{d}t$.

   (b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $t \in [-\pi, \pi]$.
   Écrire $\cos(mt)\cos(nt)$ et $\sin(mt)\sin(nt)$ comme une somme de deux cosinus.

3. (a) Déterminer la norme de c_k et de s_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots, c_n, s_n)$ est orthogonale.

   (c) En déduire une famille orthonormale de E.