ECS2

# Exercices de colle de la semaine 10

*Colle du Mercredi 4 Décembre à 13h00*

## Exercice 1

On considère la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 2te^{-t^2} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire à densité $T$ qui admet $f$ pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de $T$.
3. Déterminer le réel $\mu$, appelé médiane de $T$, tel que $P(T \leq \mu) = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que $T$ admet une espérance et une variance et les déterminer.
5. On pose $Y = -2T$. Justifier que $Y$ est une variable à densité et déterminer une densité de $Y$.
6. On pose $Z = T^2$. Montrer que $Z$ suit une loi usuelle que l'on déterminera.

---

## Exercice 2

Soit $a > 0$ et soit $f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que $f_a$ est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant $f_a$ pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
   (b) $X$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
   (c) On pose $Y = \ln(X)$. Déterminer la fonction de répartition de $Y$, puis reconnaître la loi de $Y$.

---

## Exercice 3

Pour des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on définit $\langle A, B \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On note $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la famille $(X, Y, Z, T)$ est orthogonale. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer les coordonnées de $A$ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer que la base canonique $\mathscr{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
5. Déterminer la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

---