ECS2

Exercices de colle de la semaine 10

Colle du Mercredi 4 Décembre à 14h00

Exercice 1

Soit $a \geq 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b}\exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right) & \text{si } x \geq a \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire.

   On note $\mathscr{E}(a,b)$ la loi associée.
   On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathscr{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = X - a$.

   (a) Déterminer la loi de Y et la reconnaître.

   (b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

4. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, X^p admet une espérance.

   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, $E(X^p) = a^p + bpE(X^{p-1})$.

5. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $-b\ln(1-U)+a$ suit une loi $\mathscr{E}(a,b)$.

Exercice 2

Soit Z une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose $X = e^Z$.

1. On suppose que Z suit la loi normale centrée réduite.
   On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* 0 *et* 1.

   (a) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X.

   (b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que X^α admet une espérance et déterminer $E(X^\alpha)$.

   (c) En déduire que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

2. On suppose maintenant que Z suit la loi normale de paramètres m et σ^2 (où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$).
   On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* m *et* σ^2.

   (a) Montrer que la variable aléatoire $X^* = (e^{-m}X)^{\frac{1}{\sigma}}$ suit la loi log-normale de paramètres 0 et 1.

   (b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 3

On considère, pour tous polynômes P, Q à cœfficients réels :

$$\Phi(P,\,Q) = (PQ)(0) + \int_{-1}^{1} P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et donner la norme euclidienne associée.
   On note désormais $\langle P, Q\rangle = \Phi(P, Q)$.

2. Déterminer $\langle X^p, X^q\rangle$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

3. Montrer que la famille $(1, X, X^2, X^3 - X)$ est une famille orthogonale.

4. En déduire une famille orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est également une base de $\mathbb{R}_3[X]$.