ECS2

Exercices de colle de la semaine 11

Exercice 1

On suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. La lettre a désigne un réel strictement positif donné.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

   (b) Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Calculer $E(X)$.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi que X. On pose $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$.

   (a) Donner une densité des variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies par $Y_1 = \ln(X_1)$ et $Y_2 = -\ln(X_2)$.

   (b) En déduire une densité de la variable $T = \ln(Z)$.

   (c) Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{a+1}{2}x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{a+1}{2}x^{-(a+2)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   Montrer que h est une densité de Z.

Exercice 2

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Pour tout $0 \leq p \leq n$, on pose $L_p(X) = \dfrac{d^p}{dX^p}(X^p(X-1)^p)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

3. Calculer par intégration par parties $\langle L_p, L_q \rangle$ pour $p \neq q$. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynômes à cœfficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application φ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.
   On suppose désormais que E est muni de ce produit scalaire que l'on note $\langle .,. \rangle$.

2. On considère l'application u définie pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X.$$

   (a) Montrer que u définit un endomorphisme de E.
   (b) Vérifier que pour tout $P \in E$, on a $2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.
   (c) En déduire que pour tout $P \in E$, $\langle u(P), P \rangle = 0$.
   (d) Soit (P, Q) un couple d'éléments de E.
   Développer $\langle u(P+Q), P+Q \rangle$ et en déduire que $\langle u(P), Q \rangle = -\langle P, u(Q) \rangle$.
   On dit que u est un endomorphisme *antisymétrique* de E.

3. Soit $P_1 = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}u(P_1)$.

   (a) Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille (P_1, P_2) est orthonormale.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   (c) Déterminer une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) En déduire les valeurs propres de u^2.