ECS2

Exercices de colle de la semaine 12

La colle est déplacée au Jeudi 19 Décembre de 18h à 19h.

Exercice 1

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices F et G relativement à la base canonique sont respectivement $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de F.
   En déduire les éléments propres de F. F est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le rang de $G - I_3$ et calculer $G \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire les éléments propres de G. G est-elle diagonalisable ?
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres communs à F et G.
   Déterminer la matrice de f et de g dans cette base.
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note H_a la matrice $H_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -2 & 3-a & 4-a \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que pour tout réel a, on a $H_a = aF + (1-a)G$.
   (b) Calculer $(H_a)^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X et Y deux variables indépendantes ayant f pour densité.
   Déterminer la loi de la variable $S = X + Y$.

Exercice 3

Soit f le fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit une densité de probabilités. *Dans la suite, on considère que α prend cette valeur.*
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. X admet-elle une espérance ?

Dans la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, admettant toutes f pour densité. On pose alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k = \min(X_1, \ldots, X_k)$.

3. Déterminer la fonction de répartition de Y_2, et en déduire que Y_2 est une variable à densité, dont on donnera une densité f_2.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.
5. En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.
6. Montrer que Y_2 admet une espérance. En déduire que pour tout $k \geq 2$, Y_k admet une espérance.
