ECS2

Exercices de colle de la semaine 13

Exercice 1

Soit $k \geq 2$ et $p_1, \ldots, p_k$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ ayant pour composantes $X_1, \ldots, X_k$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad P(X = e_i) = p_i,$$

où $(e_1, \ldots, e_k)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.
On note $C(X)$ la matrice carrée d'ordre k dont le coefficient à la ligne i et à la colonne j est $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$.

1. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i.
2. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?
3. Calculer $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$
4. Écrire la matrice $C(X)$.
5. On pose $A = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M = A\,{}^tU$. On note I la matrice identité d'ordre k.
   (a) Vérifier que M et $I - M$ sont des matrices de projecteurs.
   (b) Montrer que $C(X)$ et $I - M$ ont le même rang.
   (c) Déterminer le rang de $C(X)$.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où p est un réel de $]0, 1[$. On pose de plus $q = 1 - p$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

On considère également une variable aléatoire N, à valeur dans $\mathbb{N}^*$, possédant une espérance et indépendante des variables aléatoires X_n.

Pour tout ω de Ω, on pose $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$ et *on admet* que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ est une variable aléatoire.

Enfin, on rappelle la formule suivante, que l'on pourra utiliser sans la justifier. Pour tous entiers naturels r et s tels que $r \leq s$, on a :

$$\sum_{j=r}^{s} \binom{j}{r} = \binom{s+1}{r+1}$$

1. Déterminer $S_n(\Omega)$. Montrer que l'on a:

$$\forall\, k \in S_n(\Omega), \quad P([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

2. Compléter le script *Scilab* suivant pour que x contienne une simulation de la loi de S_3, où p est choisi par l'utilisateur :

```
p=input('entrer la valeur de p'),
t=find(rand(1,100)<p),
x=.......
```

3. (a) Vérifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance conditionnelle $E(S \mid [N = k])$ et donner sa valeur.

   (b) En déduire $E(S)$.

4. On suppose dans cette question que N suit la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de S.

Exercice 3

On considère l'application φ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

ainsi que l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2).$$

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée.

2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Déterminer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

4. Déterminer la dérivée de f en $(0, 0)$ dans toute direction.

5. Justifier l'existence et écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en $(0, 0)$.
   Déterminer l'équation de l'hyperplan tangent au graphe de f.
