ECS2

Exercices de colle de la semaine 14

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer que f possède un unique point critique $A \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera. Calculer $f(A)$.
3. Montrer que si $x \geq 0$, alors $f(x,y,z) \geq 0$, et que si $x \leq 0$, alors $f(x,y,z) \geq xe^x$.
4. Déterminer le minimum de la fonction $x \mapsto xe^x$, et en déduire que f atteint son minimum en A.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(k)Q(k).$$

On note $F = \{P \in E,\ P(0) = P(n) = 0\}$. On considère les polynômes :

$$M_k = \prod_{i \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (X - i) \quad \text{et} \quad N_k = \frac{M_k}{M_k(k)}$$

pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de E.
3. Montrer que $(N_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ est une base orthonormée de F.
4. Déterminer l'expression de la projection orthogonale d'un polynôme $P \in E$ sur F.
5. Calculer la distance de P à F pour tout polynôme P de E.

Exercice 3 (★)

Pour tous réels x et y, on note :

$$f(x,y) = (2+x)^2 + (1+2y)^2 + (3+x-y)^2.$$

On étudie les extrema globaux de f.

1. Justifier que f n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.
2. On étudie si f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. On propose pour cela deux méthodes.
   (a) **Méthode 1.** On se place $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $a = (-2,1,3)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ avec $u_1 = (1,0,-1)$ et $u_2 = (0,-2,1)$.
      i. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = \|a - (xu_1 + yu_2)\|^2$.

ii. En déduire que la fonction f admet un minimum atteint en un unique couple (x_0, y_0) que l'on déterminera, et préciser la valeur de ce minimum.

(b) **Méthode 2.**

i. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses points critiques éventuels.

ii. Étudier la nature de ce(s) point(s), et retrouver ainsi le résultat de la question 2.(a).
