ECS2

Exercices de colle de la semaine 15

Exercice 1

Soit E et E' deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions non nulles.
Soit f une application linéaire de E dans E' et b' un élément de E'.

1. Montrer que $\underset{x\in E}{\text{Min}} \|b' - f(x)\|$ existe.

2. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des éléments de E qui réalisent ce minimum et b_0 un élément de $\mathscr{S}$.

   (a) Montrer que $\mathscr{S} = \{b_0 + u, u \in \text{Ker} f\}$.

   (b) Montrer que $\mathscr{S}$ contient un élément de norme minimum et un seul que nous nommerons b.

   (c) Montrer que b est caractérisé par $b' - f(b) \in (\text{Im} f)^{\perp}$ et $b \in (\text{Ker} f)^{\perp}$.

3. (a) Montrer que l'application g de E' dans E qui à tout élément b' de E' associe l'élément b obtenu à la question 2. est linéaire.
   On dit que g est la pseudo-inverse de f.

   (b) Montrer que $f \circ g$ est la projection orthogonale sur $\text{Im} f$ et $g \circ f$ celle sur $(\text{Ker} f)^{\perp}$.

Exercice 2

Soit σ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{n^2 x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{n^2 x^2}{2\sigma^2}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f_n.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que X_n admet une espérance et la déterminer.

   (c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable constante égale à 0.

   (d) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 0.

Exercice 3

Soit (p_n) une suite de réels appartenant à $]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p_n.

1. On suppose que (p_n) converge vers 1.

   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

   (b) La suite (X_n) converge-t-elle en probabilité ?

2. On suppose que (p_n) converge vers 0.

   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

   (b) On pose $Y_n = p_n X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite en loi de la suite $(p_n X_n)$?
