ECS2

Exercices de colle de la semaine 15

Exercice 1

On note $E = \mathscr{C}^0([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ et l'on pose pour tout f et g dans E :

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit les fonctions :

$$f_0 : x \mapsto |x|, \quad f_1 : x \mapsto \cos(2x), \quad f_2 : x \mapsto \sin(2x).$$

1. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.
   (a) Calculer la projection orthogonale de f_0 sur F.
   (b) En déduire la distance de f_0 à F.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$. On pose, pour tous $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que si P est pair et Q impair, alors P et Q sont orthogonaux.
3. Déterminer, en fonction de n, les valeurs de a et b qui rendent minimale l'expression $\|X^2 - aX - b\|^2$.

Exercice 3

Soit σ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{n^2 x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{n^2x^2}{2\sigma^2}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f_n.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que X_n admet une espérance et la déterminer.
   (c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable constante égale à 0.
   (d) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 0.
