ECS2

Exercices de colle de la semaine 16

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : x \mapsto \begin{cases} 1-\cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.

2. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires ayant toutes f_n comme densité.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition F_{X_n} de X_n.

   (b) En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère F le sous-espace vectoriel défini par :

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-z=0\}.$$

On détermine la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale p sur F par deux méthodes.

1. **Méthode 1.**

   (a) Déterminer une base orthonormale de F.

   (b) Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

2. **Méthode 2.**

   (a) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.

   (b) On note q la projection orthogonale sur $F^\perp$. Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(q)$.

   (c) En déduire $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(p)$.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, et soit (a,b) une famille orthonormée de E.
Soit $f : E \to E$ l'application définie par $f(x) = \langle x,a\rangle b + \langle x,b\rangle a$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

2. Soit $v \in \mathrm{Vect}(a,b)^\perp$. Calculer $f(v)$. En déduire une valeur propre de f.

3. Calculer $f(a+b)$ et $f(a-b)$. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Colle de 18h à 19h

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
   Montrer que si la forme quadratique associée à M est strictement positive alors les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(t)t^k \, \mathrm{d}t \right) X^k$.

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Justifier que M est diagonalisable.

   (c) Pour $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tUMU = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k \right)^2 \mathrm{d}t$.

   (d) En déduire que toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives.

Exercice 5

Soit (p_n) une suite de réels appartenant à $]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p_n.

1. On suppose que (p_n) converge vers 1.

   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

   (b) La suite (X_n) converge-t-elle en probabilité ?

2. On suppose que (p_n) converge vers 0.

   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

   (b) On pose $Y_n = p_n X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite en loi de la suite $(p_n X_n)$?

Exercice 6

Soit E un espace euclidien et soit f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.

3. Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $\lambda = 0$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
