ECS2

Exercices de colle de la semaine 16

Exercice 1

Soit (p_n) une suite de réels appartenant à $]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p_n.

1. On suppose que (p_n) converge vers 1.
   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).
   (b) La suite (X_n) converge-t-elle en probabilité ?
2. On suppose que (p_n) converge vers 0.
   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).
   (b) On pose $Y_n = p_n X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite en loi de la suite $(p_n X_n)$?

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. Soit c un réel strictement positif. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \frac{c}{\pi(c^2+t^2)}$.
   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   (b) Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \frac{\pi}{nc} M_n$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n puis la fonction de répartition de Z_n.
   (b) Soit $x \in]-\infty, 0]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq F_{Z_n}(x) \leq \frac{1}{2^n}$.
   En déduire $\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)$.
   (c) Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrer que $n \ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.
   En déduire $\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)$.
   (d) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
   Montrer que si la forme quadratique associée à M est strictement positive alors les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(t)t^k \,\mathrm{d}t\right) X^k$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Justifier que M est diagonalisable.

(c) Pour $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tUMU = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k \right)^2 \mathrm{d}t$.

(d) En déduire que toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives.
