ECS2

Exercices de colle de la semaine 17

Exercice 1

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit la loi $\mathscr{L}(\theta)$ si une densité f de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}.$$

Soit n un entier naturel. On considère un $(2n+1)$-échantillon $(X_1, \ldots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathscr{L}(\theta)$.

1. (a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   (b) En déduire que la variable aléatoire $X - \theta$ suit une loi $\mathscr{L}(0)$.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X - \theta$, puis celles de X.
2. On pose $\overline{X_{2n+1}} = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.
   (a) Montrer que $\overline{X_{2n+1}}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.
   (b) Calculer le risque quadratique de $\overline{X_{2n+1}}$ en θ. L'estimateur $\overline{X_{2n+1}}$ est-il convergent ?

Exercice 2

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On sait que N est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue n tirages avec remise ($n \in N^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage ($1 \leq k \leq n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.
   (a) Donner l'expression, en fonction de M_n, d'un estimateur T_n de N sans biais.
   (b) Montrer que cet estimateur est convergent.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \max(Z_1, \ldots, Z_n)$.
   (a) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$, on a la relation :
   $$E(Y) = \sum_{k=1}^{N} P(Y \geq k).$$
   (b) Calculer $E(S_n)$. En déduire l'inégalité : $\quad E(S_n) \geq N - \dfrac{N}{n+1}$.
   (c) Montrer que S_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N.

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on considère $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On définit une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de f associé à $\mathbb{R}^n$.

   Calculer $\langle f(x), x\rangle$ de deux manières différentes. En déduire que les valeurs propres de f sont toutes strictement positives.

3. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g, dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f^{-1}$.

   On pourra pour cela procéder matriciellement.

4. Établir que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E.
