ECS2

Exercices de colle de la semaine 17

Exercice 1

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit la loi $\mathscr{L}(\theta)$ si une densité f de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}.$$

Soit n un entier naturel. On considère un $(2n+1)$-échantillon $(X_1, \dots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathscr{L}(\theta)$.

1. (a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   (b) En déduire que la variable aléatoire $X - \theta$ suit une loi $\mathscr{L}(0)$.
   (c) Rappeler les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X - \theta$, puis celles de X.
2. On pose $\overline{X_{2n+1}} = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.
   (a) Montrer que $\overline{X_{2n+1}}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.
   (b) Calculer le risque quadratique de $\overline{X_{2n+1}}$ en θ. L'estimateur $\overline{X_{2n+1}}$ est-il convergent ?

Exercice 2 (Deux exercices indépendants)

1. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. On définit deux estimateurs de μ en posant :

$$T_n = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

   Lequel de ces deux estimateurs est le meilleur ?

2. Soient T_1 et T_2 deux estimateurs de θ, sans biais et indépendants. Pour tout a réel, on pose $U_a = aT_1 + (1-a)T_2$.
   (a) U_a est-il un estimateur sans biais de θ ?
   (b) Parmi tous les U_a, lequel a le plus petit risque quadratique ?

Exercice 3

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme φ de E antisymétrique, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, \varphi(y) \rangle = -\langle \varphi(x), y \rangle.$$

1. Établir les propriétés suivantes :
   (a) Pour tout $x \in E$, on a : $\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$.
   (b) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$.
   (c) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par φ, alors $F^\perp$ est stable par φ.
   (d) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$, où $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

(e) Le spectre de φ est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.

2. Montrer que toutes les valeurs propres de φ^2 sont négatives ou nulles.

3. Soit :

   - F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geq 2$,
   - α un réel strictement positif,
   - u un endomorphisme antisymétrique de F tel que $u^2 = -\alpha^2 \mathrm{Id}_F$, où Id_F est l'endomorphisme identité de F.

   (a) On suppose que $p = 2$. Établir l'existence d'une base orthonormale de F dans laquelle la matrice A_α de u est donnée par : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p, montrer qu'il existe une base orthonormale de F dans laquelle la matrice B_α de u est de la forme :

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & \dots & (0) \\ (0) & A_\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}.$$
