ECS2

Exercices de colle de la semaine 18

Colle de 17h à 18h

Exercice 1

On considère n variables aléatoires réelles ($n \geq 2$) indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, de même loi de densité :

$$f_\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre inconnu strictement positif. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. (a) Calculer $E(S_n)$. En déduire l'expression, en fonction de S_n, d'un estimateur S'_n de θ sans biais.
   (b) Déterminer le risque quadratique de S'_n. Est-il un estimateur convergent ?
2. (a) Montrer que T_n est une variable à densité, et en déterminer une densité.
   (b) Montrer que T_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ. Construire à partir de T_n un estimateur T'_n sans biais de θ.
   (c) Déterminer le risque quadratique de T'_n en tant qu'estimateur de θ. Est-il convergent ?
3. Comparer les estimateurs S'_n et T'_n.

Exercice 2

Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance $E(Z) = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}^*$) et de variance $V(Z) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On pose : $\overline{Z_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Z_j$. On suppose que θ est inconnu.

1. $\overline{Z_n}$ est-il un estimateur sans biais et convergent de θ ? Déterminer son risque quadratique.
2. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, des réels non nuls et $Y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$.
   (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels $\beta_1, \ldots, \beta_n$ pour que Y_n soit un estimateur sans biais de θ.
   (b) Calculer $V(Y_n - \overline{Z_n})$. En déduire que $V(\overline{Z_n}) \leq V(Y_n)$. Interpréter ce résultat.
3. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels non nuls, et $U_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$. On suppose que U_n est un estimateur sans biais de θ, et que $r_\theta(U_n) = r_\theta(\overline{Z_n})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$.
   Montrer que $U_n = \overline{Z_n}$ avec une probabilité égale à 1. Interpréter ce résultat.

Exercice 3

On définit la fonction f sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1, +\infty[$ par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad f(x, y, z) = x \ln(1 + z) + (y - 1)^2 (z - 1) + 2z.$$

1. Donner la nature topologique de U.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
3. Montrer que f admet un unique point critique A sur U que l'on déterminera.
4. Déterminer la hessienne de f au point A.
5. Le point A est-il un extremum local pour la matrice f ?

Colle de 18h à 19h

Exercice 4

Soit a, b,et c trois réels strictement positifs et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ c & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{b}{x^4} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

1. Déterminer b et c en fonction de a pour que f soit une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}_+$.

   On suppose b et c ainsi définis dans la suite de l'exercice et X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f.

   Donner une allure de la représentation de f.

2. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$, X admet-elle un moment d'ordre k ?

3. Déterminer l'espérance et la variance de X si elles existent.

4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   (a) Construire à partir de (T_n) un estimateur (S_n) sans biais de a.

   (b) Calculer le risque quadratique de S_n. S_n est-il un estimateur convergent de a ?

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left(n + 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer le gradient de f, et en déduire que f possède un unique point critique $\hat{x}$.

3. Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\hat{x})$ de f en ce point critique.

4. En déduire que f admet un minimum local en $\hat{x}$.

Exercice 6 (Deux exercices indépendants)

1. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. On définit deux estimateurs de μ en posant :

$$T_n = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

   Lequel de ces deux estimateurs est le meilleur ?

2. On cherche à estimer le paramètre p d'une loi de Bernoulli. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi mère $\mathscr{B}(p)$, et notons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On pose :

$$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n + 1}{n + 2}.$$

   Comparer les risques quadratiques de $\overline{X_n}$ et T_n en tant qu'estimateurs de p (on étudiera les cas où p est proche de 1 et de $\frac{1}{2}$). Peut-on privilégier l'un de ces estimateurs par rapport à l'autre ?
