ECS2

Exercices de colle de la semaine 18

Exercice 1

On dispose de n variables aléatoires indépendantes notées $X_1, \ldots, X_n$ de même loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$) et définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On souhaite estimer $e^{-\theta}$.
On définit, pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire Y_i par

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) \neq 0 \end{cases}.$$

On pose $\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donner la loi de Y_i.
   (b) Quelle est la loi de $n\overline{Y_n}$? Que vaut l'espérance $E(\overline{Y_n})$?
   (c) Calculer la variance de $\overline{Y_n}$. Conclusion ?
2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.
   (a) Pour tout k élément de $[\![1, n]\!]$, rappeler la loi de S_k.
   Pour tout entier naturel j, on pose $\varphi(j) = P_{[S_n=j]}(X_1 = 0)$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel j, on a $\varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j$.
   On peut ainsi définir l'estimateur $\varphi(S_n) = \varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$.
   (c) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $E(\varphi(S_n)) = e^{-\theta}$.
   (d) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance et que :
   $$V(\varphi(S_n)) = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right).$$
   Conclusion ?
3. On souhaite ici comparer les performances de $\overline{Y_n}$ et de $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateurs de $e^{-\theta}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$e^{\frac{\theta}{n}} \leq \frac{e^\theta}{n} + \frac{n-1}{n}.$$
   (b) Montrer l'inégalité $V(\varphi(S_n)) \leq V(\overline{Y_n})$.
   (c) Comparer les risques quadratiques de $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$.

Exercice 2 (Deux exercices indépendants)

1. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. On définit deux estimateurs de μ en posant :
   $$T_n = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$
   Lequel de ces deux estimateurs est le meilleur ?

2. On cherche à estimer le paramètre p d'une loi de Bernoulli. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi mère $\mathscr{B}(p)$, et notons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On pose :

$$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n + 1}{n+2}.$$

Comparer les risques quadratiques de $\overline{X_n}$ et T_n en tant qu'estimateurs de p (on étudiera les cas où p est proche de 1 et de $\frac{1}{2}$). Peut-on privilégier l'un de ces estimateurs par rapport à l'autre ?

Exercice 3

Soit $n \geq 2$ et f la fonction définie pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ de $U = (\mathbb{R}_+^*)^n$ par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
3. (a) Montrer que si x est un point critique de f, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\nabla^2 f(x) = \alpha(nI_n - J_n),$$

   où I_n est la matrice identité d'ordre n et J_n la matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

   (b) Déterminer les valeurs propres de $nI_n - J_n$.

   (c) Peut-on en déduire la nature des points critiques de f ?

   (d) Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que f admet un minimum global sur U.
