ECS2

Exercices de colle de la semaine 2

Exercice 2.1

Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre du triangle (ABC) selon le protocole suivant :

- Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en A, elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité $0,75$ et en C avec la probabilité $0,25$.
- Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en B, elle se fixe à l'instant suivant en A avec la probabilité $0,75$ et en C avec la probabilité $0,25$.
- Si à un instant donnée, elle se trouve en C, elle ira systématiquement en B à l'instant suivant.

On désigne par a_n, b_n, c_n les probabilités qu'à l'instant n, la particule se situe en A, B ou C.

1. Déterminer des relations de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
2. En déduire l'existence d'une matrice carré de taille 3, notée M telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, puis que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
3. Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$.
4. En déduire l'expression en fonction de n, de M^n puis de a_n, b_n, c_n.
5. Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ des probabilités a_n, b_n, c_n.

Exercice 2.2

On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.
2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
3. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.
4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Exercice 2.3

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $p_n = P(A_n)$.

On note $B = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)$.

1. Expliquer pourquoi on a :

$$B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$

2. On suppose que la série $\sum_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.

3. On suppose que les évènements (A_n) sont indépendants, et que la série $\sum_k P(A_k)$ est divergente.

   (a) Montrer que l'évènement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n}\overline{A_k}\right)$.

   (b) Exprimer $P\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.

   (c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.

   (d) En déduire que $P(B) = 1$.
