ECS2

Exercices de colle de la semaine 3

Exercice 3.1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N et on extrait ces N boules une à une et sans remise. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, le numéro i est dit bien placé si ce numéro apparait lors du i-ème tirage. On considère les évènements :

- B_i : « le numéro i est bien placé ».
- $E_{N,k}$: « au cours de l'expérience, exactement k numéros sont bien placés ».

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. Pour $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq N$, calculer la probabilité de l'évènement :
$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_j} = \text{« les numéros } i_1, i_2, \ldots, i_j \text{ sont bien placés ».}$$
On admet que $P(E_{N,0}) = 1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_j})$.
3. En déduire que : $P(E_{N,0}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}$.
4. Montrer la relation : $P(E_{N,k}) = \dfrac{1}{k!} P(E_{N-k,0})$.
5. Pour k fixé, montrer que la suite $(P(E_{N,k}))_{N \geq 0}$ est convergente. On note p_k sa limite. Montrer que la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$, et reconnaitre la loi correspondante.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$S_{2p+1} \leq S_{2p+3} \leq \frac{1}{e} \leq S_{2p+2} \leq S_{2p}.$$
En déduire, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, que :
$$\sum_{j=0}^{n} |P(E_{N,j}) - p_j| \leq \frac{e}{(N+1-n)!}.$$

Exercice 3.2

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ : \ \forall j \in [\![, n]\!] \setminus \{i\}, \ P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P \in F_i$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - j)$.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

Exercice 3.3

Soit $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ formé des matrices symétriques, et $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ formé des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

2. Montrer que $\mathscr{M}_3(\mathbb{C}) = \mathscr{S}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathscr{A}_3(\mathbb{C})$.

   Quelle est l'unique décomposition de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ comme somme d'un élément de $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$ et d'un élément de $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$?

3. Déterminer une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{C})$. Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{C})$?
