ECS2

Exercices de colle de la semaine 4

Exercice 4.1

Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,:\, P(0) = 0\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,:\, P(4) = 0\}$ et $H = F \cap G$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base formée de puissances de $(X-4)$.
3. Montrer que $H = \{X(X-4) \times Q,\, Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base de H.
4. Déterminer un supplémentaire de H dans E.

Exercice 4.2

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.
Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

1. Déterminer les lois , les espérances et les variances de X_2 et X_3.
2. Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.
3. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que:
$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1).$$
4. Soit $n \geq 2$. On pose $Q_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k. \end{array}$
   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$:
   $$Q_{n+1}(s) = \frac{(1+s)}{2}Q_n(s).$$
   (c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.
   (d) Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 4.3

On dispose d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur k si l'on obtient pour la première fois *pile* puis *face* aux lancers $(k-1)$ et k (avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.
On note P_1 l'événement « On obtient *pile* au premier lancer ».

1. Déterminer $P_{P_1}(X = k)$ pour tout $k \geq 2$.
   Justifier que $P_{\overline{P_1}}(X = k) = P(X = k-1)$ pour tout $k \geq 3$.
2. En déduire que pour tout $k \geq 3$, $P(X = k) = \dfrac{1}{2}P(X = k-1) + \dfrac{1}{2^k}$.
3. Pour tout $k \geq 2$, on pose $u_k = 2^k P(X = k)$.
   Montrer que la suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est arithmétique.
   En déduire la loi de X.
4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
