ECS2

Exercices de colle de la semaine 5

Exercice 4.1

On considère un processus binomial de paramètre $p \in]0,1[$, c'est à dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p ou à un échec avec probabilité $q = 1-p$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$. On admettra que si $x \in]-1,1[$, alors la série $\sum_{n \geq r} \binom{r}{n} x^{n-r}$ converge et sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1. On note X_r le rang d'apparition du r-ème succès.
   (a) Que dire de X_1 ?
   (b) Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?
   (c) Montrer que pour tout $k \in V$, $P(X_r = k) = \binom{r-1}{k-1} p^r q^{k-r}$.
   On dit que X_r suit la *loi de Pascal de paramètre* (r,p).
2. (a) Montrer que $E(X_r)$ existe et vaut $\dfrac{r}{p}$.
   (b) Montrer que $E(X_r(X_r+1))$ et la calculer. En déduire que X_r admet une variance qui vaut $\dfrac{rq}{p^2}$.
3. On note Y_r la variable aléatoire donnant le nombre d'échecs précédant le r-ème succès.
   (a) Quelle relation a-t-on entre X_r et Y_r ?
   (b) En déduire la loi de Y_r, son espérance et sa variance.
   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le coefficient binomial généralisé :
   $$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$
   Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k+r-1}{k} = (-1)^k \binom{-r}{k}.$$
   En déduire que :
   $$P(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$
   On dit que Y_r suit la *loi binomiale négative de paramètre* (r,p).

Exercice 4.2

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont des sous-espaces vectoriels de E satisfaisant $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. (a) On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que pour tout $k \geq r$, $N_r = N_k$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier $p \leq n$ tel que $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & N_k \neq N_{k+1} \\ \forall k \geq p, & N_k = N_{k+1} \end{cases}$.
   (c) Montrer qu'on a aussi $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \geq p, & I_k = I_{k+1} \end{cases}$.
3. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.
4. (Cubes) Montrer que N_p et I_p sont des sous-espaces vectoriels stables par u, puis que l'endomorphisme induit par u sur N_p est un endomorphisme nilpotent dont on précisera l'ordre de nilpotence, et celui induit par u sur I_p est un automorphisme de I_p.

Exercice 4.3

Soit E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces supplémentaires de E, de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que

$$z = x + y.$$

On définit s la *symétrie par rapport à F dans la direction de G* en posant

$$s(z) = x - y.$$

1. Montrer que s est une application linéaire.
2. Montrer que $s \circ s = Id_E$. En particulier, s est un isomorphisme, et $s^{-1} = s$.
3. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - Id_E)$ et que $G = \mathrm{Ker}(s + Id_E)$.
4. On suppose que E est de dimension finie n, et on note $k = \mathrm{Im}(F)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Montrer que

$$M_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-k \text{ fois}}).$$