ECS2

Exercices de colle de la semaine 6

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

1. Déterminer une base des espaces $\operatorname{Ker}(A)$, $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ et $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{C}$ soit D.
3. Déterminer une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Donner P^{-1}.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n. \end{cases}$$

Exercice 2

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une verte. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On définit les trois variables aléatoires suivantes :

- X représente le numéro du tirage auquel une boule verte sort pour la première fois ;
- Y représente le nombre de boules blanches obtenues avant l'obtention de la première boule verte ;
- Z représente le nombre de boules noires obtenues avant l'obtention de la première boule verte.

1. Déterminer une relation reliant X, Y et Z.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   Donner son espérance et sa variance.
3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
   (b) En déduire la loi du couple (X, Y).
4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Montrer que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   En déduire l'espérance et la variance de Y.
5. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
   Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?
6. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n urnes numérotées de 1 à n. On suppose que pour tout entier k compris entre 1 et n, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une urne parmi les n et dans cette urne on tire au hasard une boule.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et N la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule obtenue.

1. Déterminer la loi du couple (X, N).
2. En déduire la loi de N sous forme de somme.
3. Calculer l'espérance et la variance de N.