ECS2

Exercices de colle de la semaine 7

Exercice 1

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une verte. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On définit les trois variables aléatoires suivantes :

- X représente le numéro du tirage auquel une boule verte sort pour la première fois ;
- Y représente le nombre de boules blanches obtenues avant l'obtention de la première boule verte ;
- Z représente le nombre de boules noires obtenues avant l'obtention de la première boule verte.

1. Déterminer une relation reliant X, Y et Z.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   Donner son espérance et sa variance.
3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
   (b) En déduire la loi du couple (X, Y).
4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Montrer que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   En déduire l'espérance et la variance de Y.
5. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
   Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?
6. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

Exercice 2

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N - 2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et **sans remise**, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Soient i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer qu'on a :
$$P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$
2. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?
3. (a) Montrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.
   (b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.
4. À l'aide des résultats de la question 3 :
   (a) Calculer les espérances $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
   (b) Montrer l'égalité des variances $V(X_1)$ et $V(X_2)$.
   (c) Établir la relation : $2\text{Cov}(X_1, X_2) = V(X_1)$ où $\text{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2.
   (d) En déduire la valeur de ρ_{X_1, X_2} et interpréter son signe.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que f est bien définie en 0.
3. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t = 0$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.