ECS2

Exercices de colle de la semaine 8

Exercice 1

1. Justifier que pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Soit f la fonction définie par : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. (a) Justifier qu'on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) À l'aide du changement de variable $u = t^2$ puis d'une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

   (c) Montrer que pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leq \frac{e^{-x^2}}{x^3}$.

   (d) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Étudier les variations de f.

4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 2

On considère l'application $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]-1,+\infty[$.
   On admet que f est continue sur $]-1,+\infty[$.

2. Montrer que f est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer pour tout x de $]-1,+\infty[$ une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$.

4. En déduire un équivalent de $f(x)$, lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Exercice 3

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices F et G relativement à la base canonique sont respectivement $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de F.
   En déduire les éléments propres de F.

2. Déterminer le rang de $G - I_3$ et calculer $G\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   En déduire les éléments propres de G.

3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres communs à F et G.
   Déterminer la matrice de f et de g dans cette base.

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note H_a la matrice $H_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -2 & 3-a & 4-a \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que pour tout réel a, on a $H_a = aF + (1-a)G$.

(b) Calculer $(H_a)^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
