ECS2

Exercices de colle de la semaine 9

Exercice 1

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

1. (a) Déterminer le rang de M et calculer $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En déduire les éléments propres de u.

   (b) Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

   (a) Montrer que $v \circ u = u \circ v$.

   (b) En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

   (c) Montrer que la matrice N de v dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.

   (d) En déduire les quatre seules matrices possibles pour N.

3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, (A, B) désigne un couple de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$AB - BA = A \text{ et } A \text{ non-nulle.} \qquad (*)$$

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et que A n'est pas inversible.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B - BA^k = kA^k$.

3. En considérant les valeurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

   $$\varphi : M \mapsto MB - BM,$$

   montrer qu'il existe un entier $p \in [\![2, n]\!]$ tel que $A^p = 0$.

4. On étudie à présent le cas $n = 2$.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que :

   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T.$$

   (b) Montrer que $(*)$ se réécrit alors :

   $$TC - CT = T$$

   où $C = PBP^{-1}$.

   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(*)$ dans le cas $n = 2$.

Exercice 3

On pose $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{9}\ln\left(\dfrac{9}{4}\right)\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. (a) On pose $Y = X - a$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on déterminera.
   (b) En déduire que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.
4. On pose $Z = e^X$.
   (a) Montrer que Z n'admet pas d'espérance.
   (b) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.
