Travaux Dirigés no. 8
Flot

Exercice 1

Pour $N = 1$ et $I = \mathbb{R}$, on considère le flot φ^0 en 0 de l'équation différentielle scalaire

$$(1) \begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

Déterminer explicitement $\varphi^0(t, x)$ et son domaine $\mathcal{D}^0$.

Exercice 2

Si $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on rappelle que l'opérateur de divergence est défini par

$$\mathrm{div} f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i.$$

Soit φ^{t_0} le flot associé à une équation différentielle $u' = f(t, u)$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que f vérifie

$$\mathrm{div}_x f(t, x) = 0 \qquad \forall (t, x) \in I \times \mathcal{U}.$$

Montrer alors que la différentielle du flot par rapport à x est de déterminant 1.

Exercice 3

(Examen 2011 2ème session) Soit $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application de classe C^2. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $\phi_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ l'application définie par $\phi_t(x) = G(t, x)$. On supposera que

(a) pour tout $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$;

(b) $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_s(\phi_t(x))$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^N$;

1. Montrer que $\phi_0(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t est un difféomorphisme de classe C^2 de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

On considère maintenant l'application $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définie par

$$f(x) = \frac{\partial G}{\partial t}(0, x)\,,$$

et on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = x \end{cases} \tag{2}$$

où $x \in \mathbb{R}^N$ est donné arbitraire.

3. Montrer que le problème (2) admet une unique solution maximale u.
4. En utilisant la propriété *(b)*, montrer que la solution u du problème (2) est donnée par $u(t) = G(t, x)$.

Exercice 4

On considère une population animale séparée en J juvéniles et A adultes. La dynamique de ces populations est donnée par

$$(1) \begin{cases} J' = \alpha A - J \\ A' = J - \beta A^2 \\ (J(0), A(0)) = (J_0, A_0) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On note Φ_t le flot associé au système (1).

1. Montrer que A et J restent toujours positifs.
2. Trouver les points d'équilibre du système (1).
3. Montrer que
$$\Psi(J, A) = \frac{1}{2}(J - \beta A^2)^2 + \frac{\beta}{3}A^3 - \frac{\alpha}{2}A^2$$
est une fonction de Lyapunov pour le système (1). En déduire que toutes les trajectoires existent sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5

On considère l'équation autonome

$$(1) \begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec F globalement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le bord ∂K de K est invariant par le flot de F, c'est-à-dire que pour tout $x_0 \in \partial K$, une solution de (1) est entièrement contenue dans ∂K. Montrer que si $x(t)$ est une solution de (1) avec $x_0 \in K$, alors pour tout $t > 0$, $x(t) \in K$.
2. Exemple : pour tout $R > 0$ on pose $K_R = \partial B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$. On suppose de plus que $\langle x, F(x)\rangle = 0$ pour tout $x \neq 0$. Donner un exemple d'une telle fonction F en dimension plus grande que 1, puis chercher une intégrale première pour montrer que K_R est invariant par le flot de (1).
3. Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$. On suppose cette fois ci que le champ de vecteur F est entrant sur ∂K, c'est-à-dire que pour tout $x_1 \in \partial K$, il existe un voisinage O_1 de x_1, un C^1-difféomorphisme h de O_1 dans un voisinage O_2 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une forme linéaire $\phi \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tels que $h(O_1 \cap K) = \{z \in O_2;\ \phi(z) \geq 0\}$ et $\phi(Dh \circ F(y)) \geq 0$ pour tout $y \in O_1$. Soit $x(t)$ une solution de (1) avec $x_0 \in K$. Montrer que $x(t)$ reste dans K pour tout $t \in I \cap [t_0, +\infty[$.

Exercice 6

Soit $x'(t) = f(x(t))$ une équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}^n$ avec f globalement lipschitzienne, et Φ_t le flot associé au champ de vecteur f, i.e. $\Phi_t(x_0) = x(t)$, où $x(t)$ est solution de (E) avec donnée initiale $x(0) = x_0$. On appelle ensemble ω-limite de x_0 l'ensemble

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{s\geq t} \Phi_t(x_0)} = \{x^* \in \mathbb{R}^n \,; \exists t_n \to +\infty \,;\ \Phi_{t_n} x_0 \to x^*\}.$$

1. Montrer que si l'orbite $\mathrm{Orb}(x_0)$ est bornée, alors $\omega(x_0)$ est un compact non vide connexe et invariant i.e. $\Phi_t \omega(x_0) = \omega(x_0)$.
2. Montrer que si (E) est de type "flot-gradient", alors Φ_t n'a pas d'orbites périodiques autres que les solutions stationnaires.
3. On suppose qu'il existe une fonction de Ljapunov "stricte" Ψ pour le système (E), c'est à dire
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle \nabla\Psi(x), f(x)\rangle < 0 \text{ sauf si } f(x) = 0,$$
et pour tout M, l'ensemble $\{\Psi(x) \leq M\}$ est compact.
   (a) Justifier le fait que le champ de vecteur f soit complet.
   (b) Montrer que Ψ est constante sur l'ensemble ω-limite.
   (c) On suppose que les points d'équilibre sont isolés. Montrer que si $\Phi_{t_n}(x_0)$ est une suite convergente, alors elle converge vers un point d'équilibre.
   Indication : raisonner par l'absurde supposant que $\Phi_t(v)$ n'est pas stationnaire (où v est la limite des $\Phi_{t_n}(x_0)$) et contredire la stricte décroissance de Ψ.
   (d) On suppose toujours que les points d'équilibre sont isolés. Montrer que toute trajectoire converge vers l'un d'entre eux et qu'ils sont asymptotiquement stables.
   Indication : Si a est un point d'équilibre, on pourra considérer un voisinage stable par Φ_t autour de a sous la forme $B(a, r) \cap \{\Psi < \alpha\}$ où $\alpha = \inf_{\partial B(a,r)} \Psi$.