Interrogation no. 1 du Mercredi 6 Mars 2013
Systèmes Différentiels Linéaires - Durée 1h30

Exercice 1

On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 5x - 2y + \exp(t) \\ y' & = & -x + 6y + t \end{array}\right. \tag{S}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions du système homogène (S_0) associé à (S).
2. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{c} (S_0) \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{array}\right.$$

3. Donner la résolvante du système homogène (S_0). En déduire l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la solution particulière de (S) qui s'annule en $t = 0$. En déduire l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 2

On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -3x + y + 4z \\ y' & = & x + 3y - 2z \\ z' & = & -2x + y + 3z \end{array}\right. \tag{S}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (S).
2. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{c} (S) \\ (x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0). \end{array}\right.$$

3. Donner la résolvante associée à (S). En déduire l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. En reprenant les calculs faits précédement, déterminer la décomposition de Dunford de A.
5. Retrouver $\exp(A)$ à partir de la décomposition de Dunford de A.

Exercice 3

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A : I \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une application continue. On considère le système différentiel homogène suivant :

$$u' = A(t)u. \tag{S}$$

1. Rappeler la définition de la résolvante R associée au système différentiel (S).
2. Montrer que $R(t_2, t_1) \circ R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$ (où $t_0, t_1, t_2 \in I$).