Université Paris Diderot — Année 2011/2012

L3 Maths — *Équations Différentielles Ordinaires*

Partiel du 15 mars 2012

Durée : 2h30

Les documents, calculatrices, téléphones,
et autres appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (Cours). [5 points]

1) Donner l'énoncé du Théorème de "sortie des compacts".

2) Soient $a < b$ et $f :]a,b[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable (uniformément par rapport à la première). Soient u une solution maximale du système $u' = f(t,u)$, et $I_{\max} =]c,d[$ son intervalle maximal d'existence. Montrer que

(i) si $d < b$ alors $\lim\limits_{t \uparrow d} \|u(t)\| = +\infty$;

(i) si $a < c$ alors $\lim\limits_{t \downarrow c} \|u(t)\| = +\infty$;

où $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 2. [4points]

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\beta\gamma = 0$. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + \alpha u_2 + \alpha\beta e^t \\ u_2' = u_2 + \beta u_3 + \beta\gamma e^t \\ u_3' = u_3 + \gamma u_1 + \alpha\gamma e^t \end{cases} .$$

1) Calculer la résolvante du système homogène associé.
(*Indication :* utiliser la formule $e^B = e^\lambda e^{B - \lambda I_N}$ pour $B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$)

2) En déduire la solution $u = (u_1, u_2, u_3)$ de ce système vérifiant $u(0) = (0,0,0)$.

Exercice 3. [5 points]

Soient $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$, et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère le système homogène

$$u' = k(t)Au\,.$$

1) Montrer que la résolvante $R(t,t_0)$ de ce système est de la forme

$$e^{K(t,t_0)A}$$

pour une fonction K que l'on déterminera.

2) Déterminer explicitement (en fonction de K) la résolvante dans le cas $N = 2$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*Indication :* écrire le système sous forme d'équation complexe)

Exercice 4. [6 points]

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ admettant au moins deux racines réelles distinctes. On note λ la plus petite des racines réelles de P, et Λ la plus grande.

1) Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = P(u) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

2) Donner deux valeurs (distinctes) de x_0 pour lesquelles la solution du problème de Cauchy est évidente.

3) Montrer que si $\lambda < x_0 < \Lambda$ alors la solution du problème de Cauchy est globale. (*Indication :* utiliser la question 2) de l'Exercice 1)

4) Dans le cas particulier où $P(x) = x^2 - 1$, montrer que si $x_0 > 1$ alors la solution u n'est pas globale
(*Indication :* montrer que la fonction $v = u - 1$ vérifie l'inéquation $v' \geqslant v^2$).