

Feuille de TD N° 1 : Développements limités

Exercice 1 : Calculer les développements limités suivants en 0 :

1. $(1 + \arctan(x))(e^x + 2\sin(x))$ à l'ordre 3.
2. $(1 + 2\cos(2x))(x - \ln(1 + x))$ à l'ordre 5.
3. $\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$ à l'ordre 4.
4. $\frac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 5.
5. $\frac{\ln(1-x^3)}{x - \sin(x)}$ à l'ordre 3.
6. $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ à l'ordre 4.
7. $(1+x)^{1/x}$ à l'ordre 2.

Exercice 2 : Trouver un équivalent simple lorsque x tend vers 0 des fonctions suivantes :

1. $x(1 + \cos(x)) - 2\tan(x)$.
2. $e^{\cos(x)} + e^{\cosh(x)} - 2e$.
3. $\frac{2-\tan(x)}{1+e^{-x}} - \frac{4}{4+x^2}$.

Exercice 3 : Calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

1. $\frac{x - \sin(x)}{\sin(x)^3}$ en 0.
2. $\frac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x}$ en 0.
3. $\frac{x^e - e^x}{(x - e)^2}$ en e .
4. $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/x}$ en 0.
5. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}$ en e .

Exercice 4 : Calculer le développement limité en l'infini des fonctions suivantes ;

1. $\sqrt{x(2+x)}e^{1/x}$ à l'ordre -1 .
2. $\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - x + 2}$ à l'ordre -2 .
3. $x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ à l'ordre -1 .

Exercice 5 : Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer f' .
3. Montrer que f' n'est pas dérivable en 0.
4. Montrer que f ne possède pas de développement limité à l'ordre 1 en 0.