CNAM Semestre 6
2013-2014

Feuille de TD N^o 3 : Séries de Fourier

Exercice 1 : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction suivante, avec $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$:

$$f(x) = cos(\alpha x),\ x \in [-\pi, \pi].$$

Exercice 2 : Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi & \text{si } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 : Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = |x|,\ -\pi < x \leq \pi.$$

1. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire les sommes des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4 : Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x^2,\ 0 \leq x < 2\pi.$$

1. Représenter le graphe de f et déterminer sa série de Fourier.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 5 : Développer $f(x) = sin(x)$, $0 < x < \pi$, en série de cosinus.

Exercice 6 : Soit f la fonction paire 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

<u>Exercice 7</u> : Soit u la fonction paire 2π-périodique définie par $u(x) = x^2$ si $0 \leq x < \pi$.

1. Etudier la convergence de la série de Fourier de u.
2. Calculer les coefficients de Fourier de u.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

<u>Exercice 8</u> : Soit u la fonction paire 2π-périodique définie par $u(x) = x^3$ si $0 \leq x < \pi$ et soit v la fonction impaire 2π-périodique définie par $v(x) = x^3$ si $0 \leq x < \pi$.

1. Etudier la convergence de la série de Fourier de u et de v.
2. Calculer les coefficients de Fourier de u et de v.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

<u>Exercice 9</u> : Soit $t \in \mathbb{R}^*$, fixé. On définit une fonction f_t de période 2π par $f_t(x) = e^{tx}$ sur $[-\pi, \pi[$.

1. Etudier la convergence de la série de Fourier de f_t et calculer ses coefficients de Fourier.
2. Montrer que $\displaystyle coth(\pi t) = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^2}{n^2 + t^2}$.

<u>Exercice 10</u> : Soit u la fonction paire de période 2π définie par $u(\theta) = cos^3\theta$ sur $[0, \pi]$. Etudier la convergence de sa série de Fourier et calculer ses coefficients de Fourier.