Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2011-2012

Corrigé de l'examen partiel du 19 novembre 2011

Durée : 3 heures

Exercice 1

Dans les expressions suivantes, les domaines auxquels sont astreintes les variables ne sont pas indiqués.

1. *Pour chaque expression, indiquer un domaine possible pour chacune des variables.*
2. *Pour chaque expression, dire s'il s'agit d'un nom ou d'un énoncé et indiquer ses variables libres (parlantes) et ses variables liées (muettes).*

(E_1) $\displaystyle\int_0^{k\pi} \sin t \, dt$

L'expression (E_1) est un NOM.

La variable k est une variable LIBRE qui peut être astreinte à $\mathbb{N}$ ou à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{R}$.

La variable t est une variable LIÉE par le mutificateur $\displaystyle\int \ldots dt$, qui peut être astreinte à $\mathbb{R}_+$ si k est astreinte à $\mathbb{N}$ ou à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Z}$.

(E_2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ak = a \times \frac{n(n+1)}{2}$

L'expression (E_2) est un ÉNONCÉ.

La variable n est une variable LIBRE, astreinte à $\mathbb{N}$.

La variable a est une variable LIBRE qui peut être astreinte à $\mathbb{R}$.

La variable k est une variable LIÉE par le mutificateur $\displaystyle\sum_{k=\ldots}$, astreinte à $\mathbb{N}$.

(E_3) $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid f \text{ est bornée sur l'intervalle } [0,x]\right\}$

L'expression (E_3) est un NOM.

La variable f est une variable LIBRE qui peut être astreinte à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La variable x est une variable LIÉE par le mutificateur $\{x \in \ldots \mid \ldots\}$ qui peut être astreinte à $\mathbb{R}$.

(E_4) $\displaystyle\lim_{x \to a} e^{tx}$

L'expression (E_4) est un NOM.

Les variables a et t sont des variables LIBRES qui peuvent être astreintes à $\mathbb{R}$.

La variable x est une variable LIÉE par le mutificateur $\displaystyle\lim_{x \to \ldots}$ qui peut être astreinte à $\mathbb{R}$.

(E_5) $\forall x \in A \quad \exists y \in A \quad x < y$

L'expression (E_5) est un ÉNONCÉ.

La variable A est une variable LIBRE qui peut être astreinte à l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{R}$.

Les variables x et y sont des variables LIÉES par les mutificateurs $\forall$ et $\exists$ qui peuvent être astreintes à $\mathbb{N}$. ou à $\mathbb{R}$ (en cohérence avec A).

Exercice 2

1. *Est-ce que la proposition* $(A \text{ et } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ *est une tautologie ?*
   Plusieurs démonstrations sont possibles :
   - Démonstration 1 : $(A \text{ et } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ est fausse si et seulement si $(A \text{ et } B)$ est vraie et $(A \Longrightarrow B)$ est fausse.
     Or, $(A \text{ et } B)$ est vraie si et seulement si A est vraie et B est vraie.
     Mais alors $(A \Longrightarrow B)$ est vraie.
     Donc il n'existe pas de valeurs de vérité pour A et pour B telles que $(A \text{ et } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ est fausse, donc c'est une tautologie.
   - Démonstration 2 : Établissons le tableau de vérité de la proposition $(A \text{ et } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$:

A	B	A et B	$A \Rightarrow B$	$(A \text{ et } B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

     La colonne du tableau correspondant à la proposition $(A \text{ et } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ est toujours vraie : c'est donc une tautologie.
   - Démonstration 3 :
     Supposons que $A = \text{ Vrai }$: alors $(A \text{ et } B) = B$ et $(A \Rightarrow B) = B$. Donc la proposition est égale à $B \Rightarrow B$, ce qui est vrai.
     Supposons que $A = \text{ Faux }$: alors $(A \text{ et } B) = \text{ Faux }$ et donc l'implication est vraie.
     Dans tous les cas, la proposition est vraie : c'est donc une tautologie.
2. *Est-ce que la proposition* $(A \text{ ou } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ *est une tautologie ?*

   Quand A est vrai et B est fausse, $(A \text{ ou } B)$ est vraie, $(A \Longrightarrow B)$ est fausse, donc $(A \text{ ou } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ est fausse.

   Cela n'est donc pas une tautologie.

Exercice 3

On considère les propositions suivantes :

P : $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow (C \Longrightarrow (D \Longrightarrow E)))$
Q : $(A \Longrightarrow E)$ ou $(B \Longrightarrow E)$ ou $(C \Longrightarrow E)$ ou $(D \Longrightarrow E)$

Est-il possible d'attribuer des valeurs de vérité (vrai ou faux) à A, B, C, D, E de telle sorte que l'une des propositions **P**, **Q** *soit vraie et l'autre fausse ?*

P est fausse si et seulement si A est vraie et $(B \Longrightarrow (C \Longrightarrow (D \Longrightarrow E)))$ est fausse.
$(B \Longrightarrow (C \Longrightarrow (D \Longrightarrow E)))$ est fausse si et seulement si B est vraie et $(C \Longrightarrow (D \Longrightarrow E))$ est fausse.
$(C \Longrightarrow (D \Longrightarrow E))$ est fausse si et seulement si C est vraie et $(D \Longrightarrow E)$ est fausse.
$(D \Longrightarrow E)$ est fausse si et seulement si D est vraie et E est fausse.

Donc **P** est fausse si et seulement si A, B, C, D sont vraies et E est fausse.

Q est fausse si et seulement si $(A \Longrightarrow E)$ et $(B \Longrightarrow E)$ et $(C \Longrightarrow E)$ et $(D \Longrightarrow E)$ sont fausses, c'est-à-dire si et seulement si A, B, C, D sont vraies et E est fausse.

Il n'est donc pas possible d'attribuer des valeurs de vérité (vrai ou faux) à A, B, C, D, E de telle sorte que l'une des propositions **P**, **Q** soit vraie et l'autre fausse.

Exercice 4

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie, premièrement lorsque ses variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, et deuxièmement lorsque ses variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
Chacune des douze réponses doit être brièvement justifiée.

(Q_1) : $\forall x\, \forall y\ (x < y \Longrightarrow x^2 < y^2)$:

(Q_1) est vraie dans $\mathbb{N}$ car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
(Q_1) est fausse dans $\mathbb{Z}$ car on a par exemple $-3 < -2$ mais $(-3)^2 \geqslant (-2)^2$.

(Q_2) : $\exists x\, \forall y\ (x < y \Longrightarrow x^2 < y^2)$:

(Q_2) est vraie dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ car on a dans les deux cas $\forall y\ (0 < y \Longrightarrow 0^2 < y^2)$.

(Q_3) : $\exists y\, \forall x\ (x < y \Longrightarrow x^2 < y^2)$:

(Q_3) est vraie dans $\mathbb{N}$, car on a $Q_1 \Longrightarrow Q_3$.
(Q_3) est fausse dans $\mathbb{Z}$ car sa négation : $\forall y\ \exists x\ (x < y \text{ et } x^2 \geqslant y^2)$ est vraie. En effet, soit $y \in \mathbb{Z}$, en prenant $x = -|y| - 1$, on a bien $(x < y \text{ et } x^2 \geqslant y^2)$.

(Q_4) : $\exists x\, \exists y\ (x < y \text{ et } y^2 < x^2)$:

(Q_4) est fausse dans $\mathbb{N}$, car on a $Q_1 \Longrightarrow (\text{non } Q_4)$.
(Q_4) est vraie dans $\mathbb{Z}$, on peut reprendre l'exemple donné pour (Q_1).

(Q_5) : $\forall x\, \exists y\ (x < y \text{ et } y^2 < x^2)$:

(Q_5) est fausse dans $\mathbb{N}$, car on a $Q_5 \Longrightarrow Q_4$.
(Q_5) est fausse dans $\mathbb{Z}$, car $\exists y\ \ (0 < y \text{ et } y^2 < 0^2)$ est faux.

(Q_6) : $\forall x\, \forall y\ (x \leqslant y \text{ ou } y^2 \leqslant x^2)$:

(Q_6) est vraie dans $\mathbb{N}$ car dans $\mathbb{N}$, $y^2 \leqslant x^2$ est synonyme de $y \leqslant x$, et on a bien dans $\mathbb{N}$ $\forall x\, \forall y\ (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)$.
(Q_6) est fausse dans $\mathbb{Z}$, par exemple pour $x = -2$ et $y = -3$, $(-2 \leqslant -3 \text{ ou } (-3)^2 \leqslant (-2)^2)$ est faux.

Exercice 5

1. *En utilisant exclusivement les symboles suivants :*
des variables astreintes à l'ensemble $\mathbb{N}$*, les parenthèses, les connecteurs, les quantificateurs, le signe de multiplication, le nombre* 2 *et le symboles* $=$*, écrire une proposition synonyme de la proposition suivante :*

« Tout entier naturel qui est pair et qui est un carré est divisible par 4 *»*

Une proposition synonyme est :

$$\forall n \ [((\exists k \ \ n = 2 \times k) \text{ et } (\exists k' \ \ n = k' \times k')) \Longrightarrow (\exists m \ \ n = 2 \times 2 \times m)].$$

2. *Donner une preuve de cette proposition.*
Soit n un entier naturel pair qui est un carré, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel a tel que $n = a^2$. On vérifie facilement que le carré d'un entier impair est impair, donc ici, a est pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel b tel que $a = 2b$.
On a alors $n = (2b)^2 = 4b^2$, donc n est divisible par 4.

Exercice 6

Les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{N}$ *des entiers naturels.*
Donner une preuve de la proposition suivante :

$$\forall a \ \forall b \ (a^2 \leqslant b^2 \Longrightarrow a \leqslant b).$$

Plusieurs démonstrations sont possibles :

- Démonstration 1 :
  Soient a et b deux entiers naturels tels que $a^2 \leqslant b^2$. Puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{b^2}$, c'est-à-dire $a \leqslant b$.
- Démonstration 2 :
  Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe a et b tels que $a^2 \leqslant b^2$ et $b < a$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, nécessairement $b^2 < a^2$ ce qui contredit l'hypothèse.

Une remarque : il n'était pas possible dans cet exercice d'invoquer telle quelle la croissance de la fonction carré (sans raisonnement supplémentaire) : en effet, dire que la fonction carré est croissante sur $\mathbb{N}$ c'est écrire :

$$\forall a \ \forall b \ (a \leqslant b \Longrightarrow a^2 \leqslant b^2),$$

ce qui n'est pas l'énoncé qu'on demandait de prouver.

Exercice 7

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en écrivant « vrai » ou « faux » dans la case vide correspondante.
Aucune justification n'est demandée.

P_1	$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$	Vrai	P_9	$\pi \in \{\frac{\pi}{3}, \pi\}$	Vrai
P_2	$\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$	Faux	P_{10}	$\frac{\pi}{2} \in \{\frac{\pi}{3}, \pi\}$	Faux
P_3	$\emptyset \in \{\emptyset\}$	Vrai	P_{11}	$\frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$	Vrai
P_4	$\{\emptyset\} \in \emptyset$	Faux	P_{12}	$\emptyset \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$	Faux
P_5	$\emptyset = \{\emptyset\}$	Faux	P_{13}	$\emptyset \subseteq [\frac{\pi}{3}, \pi]$	Vrai
P_6	$\pi \subseteq [\frac{\pi}{3}, \pi]$	Faux	P_{14}	$\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\} \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$	Faux
P_7	$\pi \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$	Vrai	P_{15}	$[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \subseteq \{\frac{\pi}{3}, \pi\}$	Faux
P_8	$\pi \subseteq \{\frac{\pi}{3}, \pi\}$	Faux	P_{16}	$[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \subseteq [\frac{\pi}{3}, \pi]$	Vrai

Quelques commentaires :

- Il ne faut pas confondre $\emptyset$ (qui est l'ensemble vide) et le singleton $\{\emptyset\}$ (qui est un ensemble non vide, contenant précisément un élément, $\emptyset$). En ce sens, les énoncés P_2, P_4 et P_5 sont effectivement faux.
- Il ne faut pas confondre les symboles $\in$ et $\subseteq$: en ce sens, P_6 est faux : le réel π est un élément de $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ mais ce n'est pas un sous-ensemble de $[\frac{\pi}{3}, \pi]$! Une formulation correcte possible de P_6 est $\pi \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ ou bien $\{\pi\} \subseteq [\frac{\pi}{3}, \pi]$. L'énoncé P_8 est faux pour la même raison.
- Il ne faut pas confondre $\{\frac{\pi}{3}, \pi\}$ et $[\frac{\pi}{3}, \pi]$: le premier ensemble contient exactement deux éléments, $\frac{\pi}{3}$ et π alors que le deuxième est constitué de tous les réels compris entre $\frac{\pi}{3}$ et π.

Exercice 8

Dans les propositions ci-dessous, toutes les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Pour chaque proposition A_i du tableau de gauche, on demande de trouver une proposition B_j du tableau de droite qui soit synonyme de A_i.
On inscrira dans chaque case vide en regard d'une proposition A_i le code B_j de la proposition choisie comme synonyme de A_i.
Il est possible qu'une même proposition du tableau de droite soit synonyme de plusieurs propositions du tableau de gauche et que certaines propositions du tableau de droite ne soient synonymes d'aucune des propositions du tableau de gauche.
Aucune justification n'est demandée.

A_1	$\exists x \quad xy = 1$	B_4
A_2	$\exists x \quad xy = 0$	B_1
A_3	$\forall x \quad xy = 1$	B_2
A_4	$\forall x \quad xy = 0$	B_3
A_5	$\exists x \quad xy \geqslant 0$	B_1
A_6	$\exists x \quad xy > 0$	B_4
A_7	$\forall x \quad xy \geqslant 0$	B_3
A_8	$\forall x \quad xy \geqslant x$	B_5
A_9	$\forall x \quad xy \geqslant y$	B_3
A_{10}	$\exists x \quad y = \cos x$	B_{14}
A_{11}	$\exists x \quad x = \cos y$	B_1
A_{12}	$\exists x \quad y = \tan x$	B_1
A_{13}	$\exists x \quad x = \tan y$	B_{15}
A_{14}	$\exists x \quad e^{xy} = e^x e^y$	B_6
A_{15}	$\forall x \quad e^{xy} = e^x e^y$	B_2

B_1	$y = y$
B_2	$y \neq y$
B_3	$y = 0$
B_4	$y \neq 0$
B_5	$y = 1$
B_6	$y \neq 1$
B_7	$x = y$
B_8	$x \neq y$
B_9	$y \geqslant 0$
B_{10}	$y > 0$
B_{11}	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
B_{12}	$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
B_{13}	$x \in [-1, 1]$
B_{14}	$y \in [-1, 1]$
B_{15}	$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad (y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$

Une remarque : parmi les énoncés B_j proposés, aucun énoncé n'est synonyme d'un autre. En particulier, donner deux réponses différentes en face d'un énoncé A_i est nécessairement faux.
Aucune justification n'était demandée mais on donne ici une preuve de la correction du tableau :

(1) $\exists x\ xy = 1 \Leftrightarrow y \neq 0$: en effet supposons qu'il existe x tel que $xy = 1$. Alors nécessairement y est non nul. Réciproquement si y est non nul, alors $x = \frac{1}{y}$ est tel que $xy = 1$.

(2) $\exists x\ xy = 0 \Leftrightarrow y = y$: en effet, $x = 0$ convient.

(3) $\forall x\ xy = 1 \Leftrightarrow y \neq y$: en effet, la négation de A_3, $\exists x,\ xy \neq 1$ est toujours vraie (prendre $x = 0$).

(4) $\forall x\ xy = 0 \Leftrightarrow y = 0$: en effet, si pour tout réel x, $xy = 0$, c'est en particulier vrai pour $x = 1$ donc $y = 0$. Réciproquement, si $y = 0$, alors pour tout réel x, $xy = x \times 0 = 0$.

(5) $\exists x\ xy \geq 0 \Leftrightarrow y = y$: en effet, deux cas sont possibles. Soit $y \geq 0$ auquel cas $x = 1$ convient, soit $y < 0$ auquel cas $x = -1$ convient.

(6) $\exists x\ xy > 0 \Leftrightarrow y \neq 0$: si $y \neq 0$ alors $x = 1$ si $y > 0$ ou $x = -1$ si $y < 0$ est tel que $xy > 0$. Réciproquement, raisonnons par contraposée : si $y = 0$, alors pour tout x, $xy = 0 \leq 0$.

(7) $\forall x\ xy \geq 0 \Leftrightarrow y = 0$: en effet si pour tout réel x, $xy \geq 0$ alors c'est en particulier vrai pour $x = 1$ et pour $x = -1$, ce qui donne à la fois $y \geq 0$ et $-y \geq 0$. Donc nécessairement $y = 0$. Réciproquement, si $y = 0$ alors pour tout x, $xy = 0 \geq 0$.

(8) $\forall x\ xy \geq x \Leftrightarrow y = 1$: en effet si pour tout réel x, $xy \geq x$ alors c'est en particulier vrai pour $x = 1$ et pour $x = -1$, ce qui donne à la fois $y \geq 1$ et $-y \geq -1$, c'est-à-dire $y \leq 1$. Donc nécessairement $y = 1$.

(9) $\forall x\ xy \geq y \Leftrightarrow y = 0$: en effet si cela est vrai pour tout x, c'est vrai pour $x = 0$, donc $0 \geq y$ et aussi pour $x = 2$, donc $2y \geq y$, i.e. $y \geq 0$. Donc $y = 0$. Réciproquement si $y = 0$, pour tout x, $x \times 0 = 0 \geq 0$.

(10) $\exists x\ y = \cos(x) \Leftrightarrow y \in [-1,1]$: en effet, si $y = \cos(x)$ pour un certain x, alors $|y| = |\cos(x)| \leq 1$. Réciproquement, si $|y| \leq 1$, comme la fonction cos est continue strictement décroissante de $[0,\pi]$ à valeurs dans $[-1,1]$, par théorème de la bijection, il existe un x dans $[0,\pi]$ tel que $\cos(x) = y$.

(11) $\exists x\ x = \cos(y) \Leftrightarrow y = y$: en effet, la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout y, $x = \cos(y)$ convient !

(12) $\exists x\ y = \tan(x) \Leftrightarrow y = y$: en effet la fonction tangente, en tant que fonction continue strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection de cet intervalle sur son image $]-\infty,\infty[$. En particulier, pour tout $y \in]-\infty,\infty[$, il existe $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(x) = y$.

(13) $\exists x\ x = \tan(y) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$: en effet, l'ensemble de définition de la fonction tangente est donné par $\{y \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$. Pour un y dans cet ensemble, $x = \tan(y)$ convient !

(14) $\exists x\ e^{xy} = e^x e^y \Leftrightarrow y \neq 1$: en effet $[\exists x,\ e^{xy} = e^x e^y]$ équivaut à $[\exists x,\ xy = x + y]$ puis à $[\exists x,\ x(y-1) = y]$. Si $y = 1$, cet énoncé est faux car on aurait alors $0 = 1$. Si $y \neq 1$, $x = \frac{y}{y-1}$ convient.

(15) $\forall x\ e^{xy} = e^x e^y \Leftrightarrow y \neq y$: en effet, sa négation est équivalente à $\exists x, x(y-1) \neq y$, ce qui est toujours vrai : si $y = 1$, tout x convient, et si y est différent de 1, $x = \frac{y}{y-1} + 2012$ convient.