Université Paris Diderot **Premier semestre 2011-2012**
Licence 1ère année **LM1 - Langage Mathématique**

Examen du 22 juin 2012 (deuxième session)

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices, ordinateurs et autres appareils électroniques sont interdits.

Les sept exercices sont indépendants. On peut obtenir une bonne note sans les avoir tous traités.

Le sujet comporte quatre pages. S'y ajoutent quatre feuilles annexes (1, 2, 3 et 4), destinées aux solutions des exercices II, III, IV *et* V. *Elles doivent impérativement être jointes à la copie.* ***Il est essentiel d'y inscrire le numéro étudiant****.*

Les solutions des exercices I, VI *et* VII *doivent être rédigées sur la copie.*

À l'exception des questions où la mention « On ne demande pas de justification » figure explicitement, ***toute réponse doit être justifiée****.*

Exercice I

Les variables a, b, c, x, t sont astreintes à $\mathbb{R}$, la variable n est astreinte à $\mathbb{N}$.

Dans chacun des six cas ci-dessous, l'expression proposée est le nom d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

On demande :
a) d'indiquer les occurrences libres (ou parlantes) et les occurrences liées (ou muettes) des variables qui y apparaissent ;
b) de donner un autre nom du même sous-ensemble, dans lequel il n'y ait aucune variable muette.

1) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$
2) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$
3) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right]$
4) $\{x\in\mathbb{R} \mid (\forall n\in\mathbb{N}^*)\left(a-\frac{1}{n} < x < a+\frac{1}{n}\right)\}$
5) $\{x\in\mathbb{R} \mid \int_0^x t\,dt \leqslant x\}$
6) $\{a\in\mathbb{R} \mid$ l'application $x\mapsto ax^2+b^2x+c$ est croissante au sens large sur $[0,+\infty[\}$

Exercice ii

[Pour la solution de cet exercice, utiliser la feuille annexe 1.]

Dans les cinq énoncés suivants, la variable x est astreinte à $\mathbb{R}$.

$A_1[x]$: $x = 6$

$A_2[x]$: $x = 3$ et $x = 6$

$A_3[x]$: $x = 3$ ou $x = 6$

$A_4[x]$: $x^2 - 9x + 18 = 0$

$A_5[x]$: $x \leqslant 7$ et $\sqrt{7-x} = x - 5$

Pour chacun des 25 couples (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $1 \leqslant j \leqslant 5$, indiquer si la proposition

$$\forall x\, (A_i[x] \Longrightarrow A_j[x])$$

est vraie ou fausse.

On récapitulera les réponses dans le tableau de la feuille annexe 1, en inscrivant soit **V** soit **F** dans la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j selon que l'énoncé $\forall x\, (A_i[x] \Longrightarrow A_j[x])$ est vrai ou faux.

Les réponses devront être soigneusement justifiées.

Exercice iii

[Pour la solution de cet exercice, utiliser la feuille annexe 2.
On ne demande pas de justification.]

On considère trois sous-ensembles A, B et C d'un ensemble E.

En utilisant une variable x astreinte à E, les symboles $\in$ et $\notin$, les lettres A, B, C, les connecteurs logiques "non", "et", "ou", "$\Longrightarrow$" et les parenthèses, écrire dans chacun des cas suivants un énoncé synonyme de l'énoncé proposé.

1) x appartient aux trois sous-ensembles.
2) x appartient à au moins un des trois sous-ensembles.
3) x appartient à au plus deux des trois sous-ensembles.
4) x appartient à au plus un des trois sous-ensembles.
5) x appartient à exactement un des trois sous-ensembles.
6) x n'appartient à aucun des trois sous-ensembles.

Exercice IV

[Pour la solution de cet exercice, utiliser la feuille annexe 3. On ne demande pas de justification.]

Les variables x, m, M, a sont astreintes à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des propositions figurant dans la première colonne du tableau ci-dessous, indiquer (en inscrivant un **V** ou un **F** dans la case correspondante dans le tableau reproduit sur la feuille annexe 3) si elle est vraie ou si elle est fausse pour l'application $f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$ considérée dans chacun des quatre cas suivants :

Cas 1 : $f(1) = 0$ et $\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = x$.

Cas 2 : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = x^2$.

Cas 3 : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Cas 4 : $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1], \quad f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
$\forall x \quad f(x) > x$.				
Quel que soit le réel $a \in [0,1]$, l'équation $f(x) = a$ a une solution.				
$\exists m \, \exists M \, \forall x \quad (m \leqslant f(x) \leqslant M)$.				
La fonction f admet un maximum sur $[0,1]$.				
$\forall x \quad f(x) \leqslant x$.				
f est injective.				

Exercice V

[Pour la solution de cet exercice, utiliser la feuille annexe 4.]

Les variables x et y sont astreintes à $\mathbb{R}$. On considère les quatre énoncés suivants :

$$\forall x \, \forall y \, \big(E[x,y] \Rightarrow x = y\big)$$

$$\forall x \, \exists y \, \big(x \neq y \text{ et } E[x,y]\big)$$

$$\exists y \, \forall x \; E[x,y]$$

$$\forall x \, \big((\exists y \; E[x,y]) \Rightarrow x \neq 0\big)$$

Pour chacun d'eux, on demande s'il est vrai ou s'il est faux dans chacun des trois cas suivants :

1) $E[x, y]$ est la proposition : $y \neq x$ et $y^2 = x^2$;
2) $E[x, y]$ est la proposition : $e^x = e^y$;
3) $E[x, y]$ est la proposition : $x^2 \geqslant y$.

On récapitulera les réponses dans le tableau de l'annexe 4.
Ces réponses devront être soigneusement justifiées.

Exercice VI

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k = (n-1)\, 2^{n+1} + 2.$$

Exercice VII

Notations

Étant donné des ensembles E et F et une application u de E dans F, pour toute partie X de E, on désigne par $u[X]$ l'image directe par u du sous-ensemble X :

$$u[X] = \{y \in F \mid (\exists x \in X)\,(y = u(x))\} = \{u(x) \mid x \in X\}.$$

1) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image directe de l'ensemble X par l'application u.
   a) X est l'intervalle fermé $[-2, 1]$; u est l'application $x \mapsto x^2$.
   b) X est l'intervalle fermé $[\sqrt{2}, 3]$; u est l'application $x \mapsto x^2$.
   c) $X = \mathbb{R}$; u est l'application : $x \mapsto \lfloor \sin x \rfloor$ (où $\lfloor t \rfloor$ est la partie entière du réel t).
   d) $X = \mathbb{R}$; u est l'application $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.
2) On revient au cas général. Démontrer que, quelles que soient l'application u de E dans F et les parties A et B de E, on a
$$u[A \cup B] = u[A] \cup u[B].$$
3) Démontrer que, quelles que soient l'application u de E dans F et les parties A et B de E,
$$\text{si } u[A] \cap u[B] = \emptyset, \text{ alors } A \cap B = \emptyset.$$
4) Est-il vrai que, quelles que soient l'application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les parties A et B de $\mathbb{R}$,
$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } u[A] \cap u[B] = \emptyset\,?$$