Feuille de TD n° 2

Connecteurs logiques

Dans ce TD, les lettres capitales A, B, C désignent des propositions mathématiques.

Exercice 1. Traduction de la langue (presque) courante en symbole logique

1. Écrire symboliquement C la proposition signifiant “ni A ni B”.
2. Écrire `non` C en fonction de A et B.
3. Écrire symboliquement “si A et B sont vrais, ou si les deux sont faux, alors C”.
4. Écrire symboliquement “A ou B, mais pas les deux”.
5. Écrire symboliquement “si C est vrai, alors A ou B, mais pas les deux” (Si j'ai pris le menu à 12,5 euros, alors j'ai droit à fromage ou dessert, mais pas les deux.).

Exercice 2. Construction des connecteurs binaires à partir de $\vee$ et $\neg$.

1. Vérifier que $A \wedge B$ et $\neg(\neg A \vee \neg B)$ ont la même table de vérité.
2. Vérifier que $A \Rightarrow B$ et $\neg A \vee B$ ont la même table de vérité.
3. Vérifier que $A \Leftrightarrow B$ et $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ont la même table de vérité.
4. En déduire une manière d'écrire $A \Leftrightarrow B$ en utilisant seulement $\vee$ et $\neg$.

Exercice 3. Distributivité de $\vee$ sur $\wedge$ et de $\wedge$ sur $\vee$. Distribution de $\neg$.

1. Vérifier que $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
2. Vérifier que $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
3. Vérifier que $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$, que $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, et que $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

Exercice 4. Montrer que les formules qui se trouvent sur une même ligne sont deux à deux logiquement équivalentes

1. $(A \Rightarrow B)$, $(\neg A \vee B)$, $(\neg B \Rightarrow \neg A)$, $[(A \wedge B) \Leftrightarrow A]$, $[(A \vee B) \Leftrightarrow B]$.
2. $[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$, $[(A \wedge B) \Rightarrow C]$.
3. $[A \Rightarrow (B \wedge C)]$, $[(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)]$.
4. $[A \Rightarrow (B \vee C)]$, $[(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)]$.
5. $[(A \wedge B) \Rightarrow C]$, $[(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)]$.
6. $[(A \vee B) \Rightarrow C]$, $[(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)]$.

Exercice 5. Tautologies fréquemment utilisées : montrer que les expressions suivantes sont des tautologies.

1. Modus Ponens : $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$.
2. Modus Tollens : $[(A \Rightarrow B) \wedge \neg B] \Rightarrow \neg A$.
3. Transitivité de l'implication : $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$.
4. Disjonction de cas : $[(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow C]$.
5. Raisonnement par l'absurde : $[(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow A$.

Exercice 6. Donner des exemples concrets de raisonnements basés sur chacune des cinq tautologies exposées dans l'exercice 4.

Exercice 7. Sensibilisation à l'utilisation des quantificateurs. Dans les exemples suivants, déterminer si les deux propositions sont équivalentes (dans cet exercice A[x] désigne une proposition dont la valeur dépend de x).

1. $(\forall x\ A[x]) \Rightarrow B$ et $\forall x (A[x] \Rightarrow B)$.
2. $B \Rightarrow (\forall x\ A[x])$ et $\forall x (B \Rightarrow A[x])$.
3. $(\exists x\ A[x]) \Rightarrow B$ et $\exists x (A[x] \Rightarrow B)$.
4. $B \Rightarrow (\exists x\ A[x])$ et $\exists x (B \Rightarrow A[x])$.