Interrogation du Mercredi 6 Décembre 2011

Exercice 1 ***Examen du 27 juin 2011***
On considère un sous-ensemble E majoré et non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Voici une liste d'énoncés, dans lesquels les lettres minuscules sont des variables astreintes à $\mathbb{R}$. Pour chaque couple (i, j) d'indices compris entre 1 et 10 tels que $i < j$, indiquer si les énoncés A_i et A_j sont ou ne sont pas logiquement équivalents. On pourra consigner les réponses dans un tableau. Aucune justification n'est demandée.

A_1	m est la borne supérieure de E
A_2	m est un minorant de E
A_3	m est le plus grand élément de E
A_4	x est inférieur ou égal à la borne supérieure de E
A_5	$m \in E$ et $(\forall x \in E)(x \leq m)$
A_6	$\exists m(\forall x \in E)(m \leq x)$
A_7	$\exists z(x \leq z \wedge (z \in E$ et $(\forall y \in E)(y \leq z)))$
A_8	$((\forall x \in E)(x \leq m)$ et $(\forall y < m)(\exists z \in E)(z > y))$
A_9	$(\forall x \in E)(m \leq x)$
A_{10}	$x \in E$

Exercice 2 Soient A et B deux parties de E. Le but de l'exercice est de discuter et de résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que l'équation $A \cup X = B$ a au moins une solution si et seulement si $A \subseteq B$.
2. Supposons $A \subseteq B$, et posons $X_0 = B \cap A^c$. Montrer que X est solution de l'équation si et seulement si X vérifie $X_0 \subseteq X \subseteq B$.

Solution de l'exercice 1 : Commençons par remarquer que :
- $A_5 \Leftrightarrow m$ est le plus grand élément de E,
- $A_6 \Leftrightarrow E$ possède un minorant,
- $A_7 \Leftrightarrow \exists z(x \leq z \wedge (z$ est le plus grand élément (et donc la borne supérieure) de $E))$,
- $A_8 \Leftrightarrow m$ est un majorant de E et m est le plus petit des majorants de E,
- $A_9 \Leftrightarrow m$ est un minorant de E.

Grâce à ces remarques, on en déduit les équivalences :

$$A_1 \Leftrightarrow A_8, A_2 \Leftrightarrow A_9, A_3 \Leftrightarrow A_5, A_4 \Leftrightarrow A_7.$$

Les autres énoncés ne sont pas deux à deux logiquement équivalents.

Solution de l'exercice 2 :

1. Supposons que l'équation a une solution, c'est-à-dire qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \cup X = B$. Alors $A \subseteq A \cup X$, donc $A \subseteq B$.
   Réciproquement, si $A \subseteq B$, alors $X = B$ est une solution de l'équation $A \cup X = B$.
2. Soit X solution de l'équation, ie $A \cup X = B$. On a déjà $X \subseteq B$. Soit à présent $x \in X_0$. Alors $x \in B$ et $x \notin A$. Puisque, $B = A \cup X$, $x \in A$ ou $x \in X$. Finalement, on a bien $x \in X$. D'où $X_0 \subseteq X$.
   Réciproquement, soit X tel que $X_0 \subseteq X \subseteq B$. Montrons que X vérifie $A \cup X = B$. Comme $A \subseteq B$ et $X \subseteq B$, on a déjà $A \cup X \subseteq B$. Soit à présent $x \in B$:
   - soit $x \in A$, et $x \in A \cup X$,
   - soit $x \notin A$, et alors $x \in B \cap A^c = X_0 \subseteq X$, et donc $x \in A \cup X$.

   Finalement, on a montré que $B \subseteq A \cup X$, et donc $B = A \cup X$.