CM1

Espaces vectoriels préhilbertiens complexes

Dans tout ce cours, on travaille sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1 Produits scalaires et espaces préhilbertiens

1.1 Formes sesquilinéaires hermitiennes et formes quadratiques

Définition 1 *Étant donné un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, on appelle:*

1. *forme sesquilinéaire hermitienne toute application $B : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :*
   - *l'application $x \in E \to B(x, y) \in \mathbb{C}$ est semi-linéaire pour tout $y \in E$: $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall\ x_1, x_2, y \in E$,*
   $$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1} B(x_1, y) + \overline{\lambda_2} B(x_2, y).$$
   - *l'application $y \in E \to B(x, y) \in \mathbb{C}$ est linéaire pour tout $x \in E$: $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall\ x, y_1, y_2 \in E$,*
   $$B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2).$$
   - *l'application B est hermitienne: $\forall\ x, y \in E$, $B(y, x) = \overline{B(x, y)}$.*
2. *forme quadratique sur E toute application $Q : E \to \mathbb{C}$ pouvant s'écrire sous la forme $Q(x) = B(x, x)$ pour au moins une forme sesquilinéaire hermitienne B.*

   On la notera alors $Q = Q_B$ et on dit que c'est la forme quadratique associée à B.

Remarques. Si B est une forme sesquilinéaire hermitienne, si $Q = Q_B$ est la forme quadratique associée, on a: $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall\ x, y \in E$,
$$Q(\lambda x + \mu y) = |\lambda|^2 Q(x) + 2Re(\overline{\lambda}\mu B(x, y)) + |\mu|^2 Q(y).$$
En faisant $\lambda = 1$ et $\mu = \pm 1$, on a: $\forall\ x, y \in E$,
$$\begin{aligned} Q(x + y) &= Q(x) + 2Re(B(x, y)) + Q(y) \\ Q(x - y) &= Q(x) - 2Re(B(x, y)) + Q(y) \end{aligned}$$
En faisant $\lambda = 1$ et $\mu = \pm i$, on a: $\forall\ x, y \in E$,
$$\begin{aligned} Q(x + iy) &= Q(x) - 2Im(B(x, y)) + Q(y) \\ Q(x - iy) &= Q(x) + 2Im(B(x, y)) + Q(y) \end{aligned}$$
On en déduit l'expression de B en fonction de Q: $\forall\ x, y \in E$,
$$B(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y)) + \frac{i}{4}(Q(x - iy) - Q(x + iy)). \tag{1}$$
Cette seule forme sesquilinéaire hermitienne B telle que $Q = Q_B$ est la *forme polaire de Q*.

Proposition 2 *L'application $B \to Q_B$, qui associe à toute forme sesquilinéaire hermitienne B sa forme quadratique associée Q_B, réalise un isomorphisme de l'espace vectoriel des formes sesquilinéaires hermitiennes de E sur celui des formes quadratiques de E.*

Preuve. L'application $B \to Q_B$ est linéaire car si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et B_1, B_2 sont deux formes sesquilinéaires hermitiennes, on a $Q_{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2} = \lambda_1 Q_{B_1} + \lambda_2 Q_{B_2}$ puisque :
$$\forall\ x \in E,\ (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)(x, x) = \lambda_1 B_1(x, x) + \lambda_2 B_2(x, x).$$
L'application $B \to Q_B$ est bijective car pour toute forme quadratique Q, il existe une forme sesquilinéaire hermitienne B telle que $Q = Q_B$, autrement dit telle que $Q(x) = B(x, x)$ pour tout x. B est nécessairement unique car donnée par la relation (1). $\square$

Remarque. Comme $\overline{B(x, x)} = B(x, x)$, pour tout vecteur $x \in E$, la forme quadratique $Q_B(x) = B(x, x) \in \mathbb{R}$.

Définition 3 *On considère une forme sesquilinéaire hermitienne B sur E et la forme quadratique associée $Q_B : E \to \mathbb{R}$. On dit que la forme sesquilinéaire hermitienne B, ou quadratique Q_B est:*

- *positive si pour tout $x \in E$, $Q_B(x) = B(x,x) \geq 0$.*
- *définie positive si pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $Q_B(x) = B(x,x) > 0$.*
- *négative si pour tout $x \in E$, $Q_B(x) = B(x,x) \leq 0$.*
- *définie négative si pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $Q_B(x) = B(x,x) < 0$.*

Proposition 4 *(Cauchy-Schwartz) Soient une forme sesquilinéaire hermitienne B sur E et la forme quadratique associée Q_B. Si B est positive (et donc Q_B aussi), alors: $\forall\, x, y \in E$,*

$$|B(x,y)| \leq \sqrt{Q_B(x)}\sqrt{Q_B(y)}.$$

Cette inégalité est une égalité lorsque x et y sont proportionnels, et c'est le seul cas d'égalité si B est de plus définie positive.

Preuve. Considérons la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout complexe λ par:

$$f(\lambda) = Q_B(\lambda x - y) = |\lambda|^2 Q_B(x) - 2Re(\overline{\lambda} B(x,y)) + Q_B(y).$$

Cette fonction est à valeurs positives puisque la forme quadratique Q_B est positive. En choisissant $\lambda = te^{i\theta}$ où t est un réel et où θ désigne un argument de $B(x,y)$, on a:

$$f(\lambda) = t^2 Q_B(x) - 2t\,|B(x,y)| + Q_B(y).$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

- si $Q_B(x) \neq 0$, la fonction f est un polynôme du second degré à valeurs positives, d'où:

  $$\Delta = 4\left((B(x,y)^2 - Q_B(x)Q_B(y)\right) \leq 0.$$

  On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

  $$|B(x,y)| \leq \sqrt{Q_B(x)}\sqrt{Q_B(y)}.$$

- Si $Q_B(x) = 0$, on a $f(te^{i\theta}) = -2tB(x,y) + Q_B(y)$ et f est à valeurs positives. On en déduit que $B(x,y) = 0$, sinon f changerait de signe sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwartz, qui s'écrit $0 \leq 0$.

Si x et y sont liés, on a bien entendu l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Si on suppose de plus Q_B définie positive, c'est le seul cas où l'égalité est réalisée car si $x = 0_E$, alors x et y sont liés, et si $x \neq 0_E$, l'égalité signifie $\Delta = 0$, ce qui établit que le trinôme f a une racine double λ_0 et $Q_B(\lambda_0 x - y) = 0$, d'où $y = \lambda_0 x$. $\square$

1.2 Produits scalaires complexes

Définition 5 *On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, qu'on notera en général $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*
On dit qu'un tel couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien complexe, et qu'il est hermitien si de plus l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Exemples

- Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$ est défini par :

  $$\langle x, y \rangle = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \ldots + \overline{x_n} y_n.$$

- Soit $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, strictement positive sur $]a,b[$. Alors on définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ en posant:

  $$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \omega(t) dt.$$

  On vérifie que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est sesquilinéaire hermitienne, définie positive.

Proposition 6 *Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E, on peut définir une norme sur E, dite norme hilbertienne ou hermitienne associée, en posant:*

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Preuve. L'application $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est bien une norme car:

- $\forall\ x \in E$, si $\| x \| = 0$ alors $x = 0_E$ car $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive.
- $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}, \forall\ x \in E$, $\| \lambda x \| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda| \| x \|$.
- Il reste à établir l'inégalité triangulaire pour $x, y \in E$. Comme $Re(\langle x, y\rangle) \leq |\langle x, y\rangle|$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\begin{aligned}
\| x+y \|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \| x \|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) + \| y \|^2 \\
&\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 \\
&\leq (\| x \| + \| y \|)^2.
\end{aligned}$$

□

Proposition 7 *Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E, alors la norme associée vérifie l'égalité suivante, appelée égalité du parallélogramme: $\forall\ x, y \in E$,*

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 .$$

Preuve. Laissée en exercice. □

2 Orthogonalité

Dans la suite, $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien complexe.

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 8

- *On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$.*
- *On dit qu'une famille de vecteurs $(v_i)_{i\in I}$ de E est orthogonale si:*

$$\forall\ i, j \in I,\ i \neq j,\ \langle v_i, v_j\rangle = 0.$$

- *Une famille orthogonale de vecteurs $(v_i)_{i\in I}$ de E est orthonormale si de plus pour tout $i \in I$, $\langle v_i, v_i\rangle = 1$.*

Proposition 9 *(Théorème de Pythagore) Pour toute famille orthogonale de vecteurs $(v_1, \dots, v_k)$ de E, on a:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2 .$$

Preuve. Les propriétés du produit scalaire et l'orthogonalité des vecteurs $v_1, \dots, v_k$ donnent :

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2 .$$

□

Remarque. On sait que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle)$. Si x et y sont orthogonaux, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ mais la réciproque est fausse.

Proposition 10 *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls $(v_i)_{i\in I}$ de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.*

Preuve. Formons une combinaisons linéaire nulle de la famille orthogonale de vecteurs $(v_i)_{i\in I}$ de E: soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires presque nulle telle que

$$\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = 0_E.$$

En faisant le produit scalaire par un vecteur v_j, $j \in I$, on a:

$$\left\langle v_j, \sum_{i\in I}\lambda_i v_i \right\rangle = \sum_{i\in I}\lambda_i \langle v_j, v_i\rangle = 0.$$

Par orthogonalité de la famille $(v_i)_{i\in I}$, il reste $\lambda_j \|v_j\|^2 = 0$, d'où $\lambda_j = 0$ car $v_j \neq 0_E$. □

2.2 Existence de bases orthonormales en dimension finie

Définition 11 *On appelle base orthonormale de E toute famille orthonormale de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ formant une base de E.*

Remarques.

- Comme une famille orthonormale est nécessairement libre, une telle famille forme une base orthonormale de E si et seulement si elle est génératrice dans E.
- En particulier, si E est de dimension finie n, alors une famille orthonormale de n vecteurs de E forme nécessairement une base orthonormale de E.

Proposition 12 *Tout espace préhilbertien complexe de dimension finie (c'est-à-dire tout espace hermitien) non réduit au vecteur nul admet des bases orthonormales.*

Preuve. Raisonnons par récurrence sur la dimension de E.
Si E est de dimension 1, il suffit de prendre un vecteur unitaire.
Montrons que, si un espace préhilbertien de dimension $n-1$ admet des bases orthonormales, un espace préhilbertien E de dimension n admet aussi des bases orthonormales. Soit e_n un vecteur unitaire de E. L'application $x \to \langle e_n, x\rangle$ est une forme linéaire et son noyau H est un hyperplan de E. D'après l'hypothèse de récurrence, H admet au moins une base orthonormale $(e_1, \dots, e_{n-1})$. On vérifie enfin que $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est une famille orthonormale de E de n vecteurs, donc une base orthonormale de E. □

Il existe une version "orthonormale" du théorème de la base incomplète:

Proposition 13 *Toute famille orthonormale d'un espace préhilbertien E de dimension finie peut être complétée en une base orthonormale de E.*

Preuve. Toute famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ est libre donc $p \leq n$. Pour la compléter en une base orthonormale de E, on cherche des vecteurs orthogonaux à $e_1, \dots, e_p$ qui appartiennent donc à $H_1 \cap \dots \cap H_p$ où H_k est l'hyperplan noyau de la forme linéaire $x \to \langle e_k, x\rangle$.
L'intersection de ces p hyperplans indépendants H_k est un sous-espace de dimension $n-p$ qui admet une base orthonormale $(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Montrons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale:

- si $1 \leq i < j \leq p$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ car $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormale.
- si $1 \leq i \leq p < j \leq n$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ car $e_j \in H_1 \cap \dots \cap H_p \subset H_i$.
- si $p < i < j \leq n$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ car $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est orthonormale.

Ainsi, $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale de n vecteurs, c'est donc une base orthonormale de E. □

Proposition 14 *On suppose que E est de dimension finie n rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout couple $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ de E, on a:*

$$\langle x, y\rangle = \overline{x_1}y_1 + \dots + \overline{x_n}y_n \text{ et } \|x\|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

De plus, pour tout x dans E, on a :

$$x = \langle e_1, x\rangle e_1 + \dots + \langle e_n, x\rangle e_n.$$

Preuve.

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{x_i} y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$$

On en déduit en particulier $\|x\|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2$.
De plus, en faisant le produit scalaire de x avec les e_k, on a:

$$\langle e_k, x\rangle = \left\langle e_k, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\rangle = \sum_{i\in I} x_i \langle e_k, e_i\rangle = x_k.$$

On en déduit $x = \langle e_1, x\rangle e_1 + \ldots + \langle e_n, x\rangle e_n$. □

2.3 Sous-espaces orthogonaux et projecteurs orthogonaux

Définition 15 *On appelle orthogonal d'une partie non vide A de E l'ensemble $A^\perp$ des vecteurs x orthogonaux à tous les vecteurs de A, c'est-à-dire:*

$$A^\perp = \{x \in E \ \mid \ \forall\ a \in A,\ \langle a, x\rangle = 0\}.$$

Remarques.

- $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$. En effet, pour la deuxième égalité, si $x \in E^\perp$, comme $x \in E$, x est orthogonal à lui-même, donc $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ et $x = 0_E$.
- Ainsi, on a l'équivalence suivante:

$$(\forall\ a \in E,\ \langle a, x\rangle = \langle a, y\rangle) \Longleftrightarrow (x = y).$$

  En effet, si $\forall\ a \in E,\ \langle a, x\rangle = \langle a, y\rangle$, alors $x-y$ est orthogonal à tout vecteur $a \in E$, donc $x-y \in E^\perp = \{0_E\}$ et $x = y$.

Proposition 16 *L'orthogonal $A^\perp$ d'une partie non vide A de E est un sous-espace vectoriel de E, et on a l'inclusion $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.*
Lorsque A est un sous-espace vectoriel de E, la somme $A \oplus A^\perp$ est directe.

Preuve.

- L'ensemble $A^\perp$ est non vide car $0_E \in A^\perp$. Il est stable par combinaison linéaire: Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, si $x, y \in A^\perp$, alors $\forall\ a \in A$,

$$\langle a, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda \langle a, x\rangle + \mu \langle a, y\rangle = 0.$$

- On a $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$ car si $a \in A$, $\forall\ x \in A^\perp$,

$$\langle a, x\rangle = 0,\ \text{donc}\ \langle x, a\rangle = 0$$

  et on en déduit que $a \in \left(A^\perp\right)^\perp$, ce qui établit l'inclusion.
- La somme $A + A^\perp$ est direct puisque $A \cap A^\perp = \{0_E\}$. En effet, si $x \in A \cap A^\perp$, on a $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ donc $x = 0_E$.

□

Remarques. Lorsque F est un sous-espace vectoriel de E et E de dimension finie, on montrera que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$. Par contre, en dimension infinie, ces égalités ne sont plus toujours vérifiées.

Définition 17 *On dit que les sous-espaces d'une famille $(F_i)_{i\in I}$ sont supplémentaires orthogonaux si :*

- *ils sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire $E = \bigoplus_{i\in I} F_i$.*
- *ils sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire $\forall\ (v_i, v_j) \in F_i \times F_j, (i \neq j) \Longrightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0$.*

On appelle alors projecteurs orthogonaux associés à ces supplémentaires orthogonaux la famille des projecteurs $(p_i)_{i\in I}$ sur les sous-espaces vectoriels F_i dans la direction de la somme directe orthogonale des autres.

Proposition 18 *Pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F, les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, alors la projection orthogonale d'un vecteur x sur F (dans la direction $F^\perp$) est :*

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k.$$

Preuve. Si on le munit du produit scalaire induit par celui de E, F est un espace préhilbertien de dimension finie et on sait qu'il admet des bases orthonormales $(e_1, \ldots, e_n)$. Pour montrer que $E = F \oplus F^\perp$, on raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse: Considérons un vecteur $x = y + z \in F + F^\perp$.

  Comme $y \in F$, $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ et $z = x - y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in F^\perp$. Alors pour tout $1 \leq k \leq n$,

  $$\langle e_k, z\rangle = \langle e_k, x\rangle - \langle e_k, y_1e_1 + \ldots + y_ne_n\rangle = \langle e_k, x\rangle - y_k = 0.$$

  La décomposition de x est donc unique (donc la somme $F + F^\perp$ est direct) et est donnée par la formule suivante :

  $$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k + \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k\right).$$

- Synthèse: Considérons un vecteur $x \in E$ et décomposons-le sous la forme $x = y + z$ avec

  $$y = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k \text{ et } z = x - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k.$$

  $y \in F$ puisqu'il est combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$. $z \in F^\perp$ puisqu'il est orthogonal à la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Ainsi, tout vecteur $x \in E$ appartient à $F \oplus F^\perp$.

Ainsi, $E = F \oplus F^\perp$. De plus, la formule obtenue montre que la projection orthogonale d'un vecteur x sur F est donnée par la formule:

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k.$$

□

Proposition 19 *(Orthonormalisation de Gram-Schmidt) Pour toute suite libre $(v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ de vecteurs de E, il existe une et une seule suite $(e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ dite orthonormalisée de Gram-Schmidt telle que:*

- *la famille $(e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ est orthonormale.*
- *$\forall\ k \geq 0$, $Vect(e_0, e_1, \ldots, e_k) = Vect(v_0, v_1, \ldots, v_k)$.*
- *$\forall\ k \geq 0$, $\langle e_k, v_k\rangle > 0$.*

Preuve. Construisons la suite $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ par récurrence sur n.
Si $n = 0$, on prend pour e_0 le vecteur $\frac{v_0}{\|v_0\|}$.
Supposons $(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ obtenus et considérons e_n vérifiant :

- $Vect(e_0, \ldots, e_n) = Vect(v_0, \ldots, v_n)$,
- e_n est orthogonal à $Vect(e_0, \ldots, e_{n-1}) = Vect(v_0, \ldots, v_{n-1})$,
- e_n est unitaire.

Les deux premières conditions sont réalisées si et seulement si e_n dirige la droite de $Vect(v_0, \ldots, v_n)$ qui est orthogonale à $Vect(e_0, \ldots, e_{n-1}) = Vect(v_0, \ldots, v_{n-1})$. Un vecteur directeur de celle-ci s'obtient en ôtant à v_n sa projection orthogonale sur $Vect(e_0, \ldots, e_{n-1})$, égale à $p_{n-1}(v_n) = \langle e_0, v_n\rangle\, e_0 + \ldots + \langle e_{n-1}, v_n\rangle\, e_{n-1}$. Les deux premières conditions sont donc réalisées si et seulement si

$$e_n = \mu(v_n - p_{n-1}(v_n)), \text{ avec } \mu \neq 0.$$

Ce vecteur e_n est unitaire si $|\mu| = \| v_n - p_{n-1}(v_n) \|^{-1}$. Remarquons que $\| v_n - p_{n-1}(v_n) \|$ est non nul car sinon $v_n \in Vect(e_0, \ldots, e_{n-1}) = Vect(v_0, \ldots, v_{n-1})$ et la famille $(v_0, \ldots, v_n, \ldots)$ ne serait pas libre, contrairement à l'hypothèse.

Le scalaire μ est ainsi fixé à un facteur $e^{i\theta}$ près.

La dernière condition détermine alors μ car l'égalité $v_n = \mu^{-1}e_n + p_{n-1}(v_n)$ implique $\langle e_n, v_n\rangle = \left\langle e_n, \mu^{-1}e_n + p_{n-1}(v_n)\right\rangle = \mu^{-1}$, de sorte que $\langle e_n, v_n\rangle > 0$ si et seulement si $\mu^{-1} > 0$ c'est-à-dire $\mu > 0$.
Comme $|\mu| = \| v_n - p_{n-1}(v_n \|^{-1}$, cette condition équivaut à $\mu = \| v_n - p_{n-1}(v_n \|^{-1}$. Finalement, e_n vérifie l'ensemble des conditions de la proposition si et seulement si

$$e_n = \frac{v_n - p_{n-1}(v_n)}{\| v_n - p_{n-1}(v_n) \|} = \frac{v_n - \langle e_0, v_n\rangle e_0 - \ldots - \langle e_{n-1}, v_n\rangle e_{n-1}}{\| v_n - \langle e_0, v_n\rangle e_0 - \ldots - \langle e_{n-1}, v_n\rangle e_{n-1} \|}.$$

□

Proposition 20 *On suppose que E est de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $E = F \oplus F^\perp$ et $F = \left(F^\perp\right)^\perp$. En particulier, $dim(E) = dim(F) + dim(F^\perp)$.*

Preuve. Comme E est de dimension finie, ses sous-espaces F le sont aussi. D'après la proposition 18, F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux, c'est-à-dire $E = F \oplus F^\perp$. On en déduit que $dim(E) = dim(F) + dim(F^\perp)$.

On a comme d'habitude $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ et ces sous-espaces sont égaux car ils ont même dimension puisqu'on a $dim\left(\left(F^\perp\right)^\perp\right) = din(E) - dim\left(F^\perp\right) = dim(F)$. □

2.4 Inégalité de Bessel, égalité de Parseval

Proposition 21 *Pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie, la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de F est l'unique vecteur réalisant la distance de x à F :*

$$\| x - p_F(x) \| = \inf\{\| x - y \| \mid y \in F\}.$$

De plus, si $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, la distance de x à F est :

$$d(x, F) = \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2}.$$

Preuve. Pour tout vecteur y appartenant à F, on a:

$$x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y).$$

Comme $p_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F, on a $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Donc $p_F(x) - y \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$ et le théorème de Pythagore donne:

$$\| x - y \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) - y \|^2 \geq \| x - p_F(x) \|^2 .$$

Donc $\| x - y \| \geq \| x - p_F(x) \|$ avec égalité pour $\| p_F(x) - y \| = 0$, c'est-à-dire $y = p_F(x)$. On en déduit que

$$d(x, F) = \| x - p_F(x) \| = \inf\{\| x - y \| \mid y \in F\}.$$

Comme $(e_0, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, on a $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$. Comme le théorème de Pythagore donne $\| x \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) \|^2$ et $\| p_F(x) \|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2$, on a :

$$d(x, F) = \| x - p_F(x) \| = \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2}.$$

□

Proposition 22 *(Inégalité de Bessel) Pour toute famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on a, pour tout $x \in E$,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2 \leq \| x \|^2 . \tag{2}$$

et la distance de x au sous-espace $Vect(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$\sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2} \geq 0. \tag{3}$$

Preuve. La famille $(e_0,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de $F_n = Vect(e_0,\dots,e_n)$. Comme $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k$ est la projection orthogonale de x sur F_n, on a:

$$\| x \|^2 = \| x_n \|^2 + \| x - x_n \|^2 \geq \| x_n \|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2 .$$

Ainsi, la suite $n \to \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2$ est croissante et majorée, donc elle converge. On en déduit par passage à la limite l'inégalité de Bessel (2).

Notons d la distance de x au sous-espace $F = Vect(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque $x_n = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k \in F$, on a $d \leq d(x, x_n)$ pour tout entier naturel n, et donc: $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$d \leq \| x - x_n \| = \sqrt{\| x \|^2 - \| x_n \|^2} = \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2}.$$

Par passage à la limite, on a $d \leq \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2}$.
Inversement, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $\tilde{x} \in F$ tel que $\| x - \tilde{x} \| < d + \epsilon$. Comme $\tilde{x} \in F$, il est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs e_k et il existe donc un entier N tel que $\tilde{x} \in F_N = Vect(e_0,\dots,e_N)$, de sorte qu'on a :

$$\sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2} \leq \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{N} |\langle e_k, x\rangle|^2} \leq \| x - x_N \| \leq \| x - \tilde{x} \| \leq d + \epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $\sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2} \leq d$. On en déduit ainsi la formule (3). □

Proposition 23 *Pour toute famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, il y a équivalence au sens de la norme associée au produit scalaire entre :*

1. *le sous-espace $Vect(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans l'espace préhilbertien E.*
2. *pour tout vecteur x de E, la suite $n \to x_n = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k$ converge vers x.*
3. *pour tout vecteur x de E, on a l'égalité de Parseval (qui équivaut à la nullité de la distance de tout vecteur x au sous-espace $Vect(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$) :*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2 = \| x \|^2$$

Preuve. La famille $(e_0,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de $F_n = Vect(e_0,\dots,e_n)$ donc $x_n = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k$ est la projection orthogonale de x sur F_n.

Montrons que 1. et 2. sont équivalents. Si $F = Vect(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E, pour tout $x \in E$, $\epsilon > 0$, il existe $\tilde{x} \in F$ tel que $\| x - \tilde{x} \| \leq \epsilon$. Comme $\tilde{x} \in F$, il existe donc un entier N tel que $\tilde{x} \in F_N$ et comme $F_N \subset F_n$ pour tout $n \geq N$, on a $\| x - x_n \| = d(x, F_n) \leq d(x, F_N) \leq \| x - \tilde{x} \| \leq \epsilon$. Ainsi, la suite (x_n) converge vers x.
Réciproquement, si pour tout $x \in E$, la suite (x_n) d'éléments de F converge vers x, alors par définition F est dense dans E.

Montrons que 2. et 3. sont équivalents. Comme x_n est la projection orthogonale de x sur F_n, $\| x \|^2 = \| x_n \|^2 + \| x - x_n \|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2 + \| x - x_n \|^2$. Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$\| x - x_n \| = \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2}.$$

Donc (x_n) converge vers x si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2 = \| x \|^2$. □