TD2

Applications linéaires d'un espace vectoriel euclidien

1 Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice 1 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $< M; N >= \mathrm{Tr}(\,{}^tMN)$. Déterminer l'adjoint des endomorphismes

$$f : M \mapsto AM - MB,\ g : M \mapsto {}^tAMA.$$

Exercice 2 Supposons $\dim(E) = 2$ et (e_1, e_2) une bon de E. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. Déterminer l'endomorphisme adjoint u^* de u, puis calculer $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ munit du produit scalaire

$$< P, Q >= P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme $\delta : f \mapsto f'$.

Exercice 4 On considère deux sous-espaces supplémentaires F et G d'un espace euclidien E. On désigne par p la projection sur F dans la direction de G.

1. Etablir que $G = F^\perp$ si et seulement si p vérifie la relation :

$$\forall x, y \in E, < p(x), y >=< x, p(y) > .$$

2. Etablir, si $G = F^\perp$, que $||p(v)|| = ||v||$ pour tout v.

   Inversement, si $||p(v)|| = ||v||$ pour tout v, montrer en utilisant des vecteurs de la forme $v = x + ty$ $(t \in \mathbb{R}, x \in F, y \in G)$ que $G = F^\perp$.

Ainsi un projecteur est orthogonal si et seulement s'il ne peut augmenter la norme (penser à la projection des ombres par les rayons du soleil).

Exercice 5 On considère dans $\mathbb{R}^n$ la projection orthogonale p sur le sous-espace V engendré par les p vecteurs indépendants $V_1, \cdots, V_p$. On désigne alors par A la matrice des p vecteurs $V_1, \cdots, V_p$ dans la base canonique.

1. Montrer que la matrice carrée ${}^tAA$ est inversible.
2. Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $p(X) = y_1V_1 + \cdots + y_pV_p$. Exprimer $Y = (y_1, \cdots, y_p)$ en fonction de A et X.
3. En déduire la matrice de la projection orthogonale p sur V.

2 Automorphismes orthogonaux

Exercice 6

1. On suppose $\dim(E) = 1$, qui sont les éléments de $O(E)$?
2. Soit $u, v \in O(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est ce que $u + v \in O(E)$? $\lambda u \in O(E)$? $u \circ v \in O(E)$?

Exercice 7 Dans tout cet exercice on se place dans le plan euclidien orienté.

1. Montrer que pour tout couple (u, v) de vecteurs unitaires, il existe une unique rotation f telle que $f(u) = v$.

   On appelle alors angle orienté (u, v) l'ensemble de tous les couples de vecteurs unitaires de la forme $(u_1, f(u_1))$. De plus la mesure de l'angle orienté $(u, f(u))$ est la mesure de la rotation f.

   Si $(u, f(u))$ et $(v, g(v))$ sont deux angles orientés, on pose :

$$(u, f(u)) + (v, g(v)) = (w, f \circ g(w).$$

2. Montrer que l'ensemble des angles orientés muni de la loi + est un groupe commutatif, isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

3. Montrer que pour toute rotation r_+, $(r_+(u), r_+(v)) = (u, v)$.

4. Montrer que pour toute reflexion r_-, $(r_-(u), r_-(v)) = -(u, v)$.

5. Démontrer que dans le plan euclidien, la somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat.

6. Démontrer que dans un plan euclidien, si O est centre du cercle passant par deux point A, B, alors pour tout point M de ce cercle distinct de A et B on a

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{MA}, \vec{MB}).$$

Exercice 8 Soit r la rotation d'axe dirigée par w unitaire et d'angle de mesure θ orienté par w. Montrer que pour tout $u \in E$,

$$r(u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)(w \vee u) + 2 < w, u > \sin^2(\frac{\theta}{2})w.$$

Exercice 9 Soit l'espace euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe.

1. Déterminer la matrice de la réflexion par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

2. Déterminer la nature et les caractéristiques des endomorphismes dont la matrice est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ ; B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 Étudier les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) sont

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \ ; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; E = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

3 Endomorphismes symétriques

Exercice 11 Soit u, v des endomorphismes symétriques et $\lambda \in \mathbb{R}$, est ce que $u + v$ est symétrique ? Même question pour λu et $u \circ v$.

Exercice 12 La matrice de Gram de n vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ d'un espace euclidien E est la matrice symétrique réelle

$$\text{Gram}(v_1, \cdots, v_n) = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & \cdots & < v_1, v_n > \\ \vdots & & \vdots \\ < v_n, v_1 > & \cdots & < v_n, v_n > \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice $\text{Gram}(v_1, \cdots, v_n)$ est symétrique positive, et qu'elle est définie positive si et seulement si la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre.

Exercice 13 Soit u un endomorphisme symétrique d?ordre fini d'un espace euclidien (i.e. il existe $n \geq 1$ tel que $u^n = \text{Id}$). Montrer que $u^2 = \text{Id}$.

Exercice 14 Diagonaliser en base orthonormale la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

1. Etablir qu'une matrice M symétrique définie positive est inversible. Montrer de plus que M^{-1} est également symétrique définie positive.

2. Etablir ainsi que la matrice $H = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$ est définie positive, donc inversible.

Exercice 16

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   - A est symétrique positive,
   - Il existe $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tXX$.

2. En déduire que si $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont symétriques positives, alors $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 17 Montrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont nulles ou imaginaires pures.

Exercice 18 Soit u un endomorphisme de E. Montrer qu'on a l'équivalence entre

- $u^* = -u$,
- pour tout $x \in E$, $< x, u(x) >= 0$.