

TD3

## Espaces affines euclidiens: Paramétrages et équations dans l'espace

On se place dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### Exercice 1

1. Déterminer une équation du plan contenant  $\mathcal{D}_1$  et parallèle à  $\mathcal{D}'_1$  avec :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}'_1 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}'_2$  sont sécantes, avec :

$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - 3z \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}'_2 : \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

- (b) Donner une équation du plan contenant  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}'_2$ .

### Exercice 2

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la sphère  $\mathcal{S}(O, 1)$  avec la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A(1, 1, 1)$  et dirigée par  $\vec{u}(1, 2, 1)$ .
- Déterminer une équation cartésienne du cylindre de révolution de rayon 2 et d'axe  $\mathcal{D} = O + \text{Vect}(\vec{u})$  avec  $\vec{u} = (1, 2, 1)$

**Exercice 3** On considère dans un repère orthonormé une droite non horizontale  $\mathcal{D}$  ayant pour vecteur directeur  $\vec{u}(a, b, c)$  ( $a, b, c \neq 0$ ) et passant par un point donné  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

- A quelle condition cette coupe-t-elle la droite  $(Oz)$ ?
- Déterminer une équation cartésienne de la surface  $\Sigma$  obtenue par rotation de  $\mathcal{D}$  autour de  $(Oz)$  en distinguant les cas où  $\mathcal{D}$  coupe ou non  $(Oz)$ .

**Exercice 4** On considère la droite  $\mathcal{D}$  d'intersection des plans non parallèles  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  :

$$P : ux + vy + wz + h = 0 \quad \text{et} \quad P' : u'x + v'y + w'z + h' = 0.$$

Déterminer tous les plans contenant  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 5** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soient les plans  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  d'équations :

- $\mathcal{P}_1 : \lambda x + y + z + 1 = 0;$
- $\mathcal{P}_2 : x + \lambda y + z + \lambda = 0;$
- $\mathcal{P}_3 : x + y + \lambda z + 1 = 0.$

Déterminer selon  $\lambda$  la nature de l'intersection des ces trois plans.

Dans le cas où cette intersection est une droite, donner une représentation paramétrique de cette droite.

**Exercice 6** Déterminer les équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux deux droites :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} 2x - 4y + z - 1 = 0 \\ 3x - 6y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

### Exercice 7

1. Soient deux droites non parallèles  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Déterminer une équation de l'ensemble des points  $M$  équidistants des droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .
2. Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . On considère la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(a, b, c)$  et dirigée par  $\vec{u} = (1, 2, 1)$  et la droite  $\mathcal{D}'$  passant par  $A'(c, b, a)$  et dirigée par  $\vec{u}' = (2, 1, 2)$ . A quelle condition sur  $a, b, c$  ces deux droites sont-elles coplanaires? Donner alors une équation de leur plan commun.

### Exercice 8

1. Soient  $A(0, 0, 3)$  et  $B(2, 2, 2)$ . Déterminer une équation de la sphère  $\mathcal{S}_1$  de diamètre  $AB$ .
2. Soient  $\mathcal{S}_2$  la sphère de centre  $\Omega(1, 3, 0)$  et passant par  $A(-1, 1, 2)$ .
  - (a) Déterminer une équation de la sphère  $\mathcal{S}_2$ .
  - (b) Donner une équation du plan tangent à  $\mathcal{S}_2$  en  $A$ .
3. Soient  $\mathcal{S}_3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$ .
  - (a) Déterminer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère  $\mathcal{S}_3$ .
  - (b) Montrer que le plan  $\mathcal{P} : 2x + 2y - z - 7 = 0$  est tangent à  $\mathcal{S}_3$  et déterminer les coordonnées du point de contact.

**Exercice 9** Soient le point  $A(1, 2, 1)$  et les vecteurs  $\vec{u}_1(1, 1, -2)$ ,  $\vec{u}_2(1, -1, 1)$  et  $\vec{u}_3(3, 0, 2)$ . On note :

- $\mathcal{P}_1$  le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{u}_1$ ;
- $\mathcal{P}_2$  le plan passant par  $A$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$ ;
- $\mathcal{P}'_1$  le plan d'équation  $2x + y + z + 1 = 0$ ;
- $\mathcal{P}'_2$  le plan d'équation  $x - y - z - 4 = 0$ .

Soient  $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{D}' = \mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}'_2$ .

1. Montrer que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont des droites. Donner un point et un vecteur directeur pour chacune de ces droites.
2. Soient  $\Pi$  le plan orthogonal à  $\mathcal{D}$  en  $A$  et  $\Pi'$  le plan orthogonal à  $\mathcal{D}'$  en  $A'(1, -1, -2)$ .
  - (a) Déterminer une équation de  $\Pi$ .
  - (b) Déterminer une équation de  $\Pi'$ .
  - (c) Déterminer une représentation paramétrique de  $\Delta = \Pi \cap \Pi'$ .
3. Soit  $\mathcal{S}$  la sphère tangente à  $\mathcal{D}$  en  $A$  et à  $\mathcal{D}'$  en  $A'$ . On note  $\Omega$  son centre et  $R$  son rayon.
  - (a) Montrer que  $\Omega \in \Pi$ .
  - (b) Déterminer les coordonnées de  $\Omega$ .
  - (c) Déterminer  $R$ .