TD1

Espaces probabilisés

Calculs de probabilités

Exercice 1 Une boîte de chocolats contient 10 chocolats blancs, 12 au lait et 6 noirs. Une personne en mange six.

1. Probabilité pour que tous les chocolats mangés soient blancs ?
2. Probabilité pour que deux soient blancs, trois au lait et un noir ?

Exercice 2 Un mercier daltonien fait tomber deux boîtes de fils à broder de couleurs différentes, contenant chacune dix écheveaux. Il les range comme il peut. Calculer les probabilités pour que

1. Les vingt écheveaux soient bien rangés.
2. Chaque boîte contient cinq écheveaux de la bonne couleur et cinq de la mauvaise.
3. Une boîte contient six écheveaux de la bonne couleur et quatre de la mauvaise.

Exercice 3 Les 1000 billets d'une loterie sont mis en vente. Trois numéros gagnants sont tirés au sort. Un joueur fanatique acquiert 500 billets. Probabilité pour qu'il ait
(a) Un billet gagnant et un seul. (b) Aucun billet gagnant.
(c) Au moins deux billets gagnants. (d) Trois billets gagnants.

Exercice 4 Une urne contient huit boules rouges et sept blanches. On en tire une première boule puis, sans la remettre, une deuxième.

1. Probabilité pour que les deux boules soient rouges ? Blanches ? de couleurs différentes ?
2. Mêmes questions si l'on suppose que l'on remet la première boule avant de tirer la seconde.

Exercice 5 Un cadenas à combinaison ne peut s'ouvrir que si l'on forme le nombre de 4 chiffres (de 0 à 9) qui a été programmé lors de sa fabrication. L'acheteur a oublié le code, mais il se souvient que ses 4 chiffres sont différents.

1. On suppose d'abord que notre acheteur essaie au hasard des combinaisons de 4 chiffres différents, sans essayer deux fois la même. Quel est le nombre maximal d'essais?
   Quelle est la probabilité qu'il réussisse en moins (au sens large) de 100 essais?
2. Que devient cette probabilité s'il est incapable de se souvenir des essais précédents?

Exercice 6 Soit A et B deux événements d'une même expérience pour lesquels on connaît:

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad , \quad P(A/B) = 0,3 \quad , \quad P(A \cap B^c) = 0,3.$$

Calculer les probabilités: $P(A)$, $P(B)$, $P(B \cap A^c)$, $P(A^c \cap B^c)$.

Probabilités conditionnelles, indépendance

Exercice 7 Soit A et B deux événements relatifs à la même expérience tels que $P(A/B) = P(A/B^c)$. Montrer que les événements A et B sont indépendants.

Exercice 8 Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux événements A et B soient indépendants est que:

$$P(A \cap B).P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}).P(\overline{A} \cap B).$$

Exercice 9 Un joueur a dans sa poche deux pièces de monnaie. L'une N est équilibrée, l'autre T est pipée de manière que face sorte 2 fois plus souvent que pile.
Il prend au hasard l'une des deux pièces et la lance 6 fois. Il obtient 4 fois face. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi la pièce T?

Exercice 10 Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on a constaté que 5% des malades avaient été vaccinés et que 8% des personnes vaccinées ont été malades.

1. Quelle était la probabilité pour un individu de la population de tomber malade lors de l'épidémie?
2. Quelle était celle de tomber malade pour un individu non vacciné?

Exercice 11 n urnes sont numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules blanches et n-k boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire deux boules. Quelle est la probabilité d'avoir tiré deux boules blanches

- si on tire avec remise?
- si on tire sans remise?

Exercice 12 Les lampes de poche que l'on trouve dans un supermarché sont fabriquées par deux usines: 75% proviennent de l'usine A, et le reste de l'usine B.
On suppose que le pourcentage des lampes de mauvaise qualité est $p = 5\%$ pour l'usine A et $2p = 10\%$ pour l'usine B.

1. On prélève avec remise deux lampes au hasard dans le supermarché. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux de mauvaise qualité?
2. On prélève avec remise deux lampes au hasard dans le supermarché. Sachant qu'elles sont toutes les deux de mauvaise qualité, quelle est la probabilité qu'elles proviennent de la même usine?

Exercice 13 Des observations répétées conduisent à penser que si un employé se présente en retard à son travail, il récidive le lendemain avec une probabilité 1/10. Par contre, s'il est à l'heure un jour, c'est avec une probabilité 3/10 qu'il est en retard le lendemain.
On appelle p_n la probabilité qu'il soit en retard le n-ième jour. En outre, on suppose que $p_1 = 0,5$.

1. Former une relation entre p_n et p_{n+1}.
2. On pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$. Former une relation entre u_n et u_{n+1}. (On doit reconnaître une suite géométrique.)
3. En déduire la valeur de u_n puis celle de p_n.
4. La suite $(p_n)_n$ a-t-elle une limite quand n tend vers l'infini, et si oui laquelle?