Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2013-2014
MA 0804 - Master 1

TD2

# Variables aléatoires discrètes et continues

## Variables aléatoires discrètes

**Exercice 1** On lance une pièce de monnaie non truquée jusqu'à ce qu'on ait obtenu exactement 10 fois face. Quelle est la loi du nombre $N$ de piles observés au cours de cette expérience?

**Exercice 2**

1. Pour quelles valeurs de la constante $C$ peut-on trouver une loi de probabilité pour la variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P[X=n] = \frac{C}{n} P[X=n-1] \ ?$$

   Préciser la ou les loi(s) de probabilité en question.

2. On suppose maintenant que $C > 0$.
   Comparer les trois probabilités suivantes:

$$P_1 = P[X \in 2\mathbb{N}] \qquad P_2 = P[X \in 2\mathbb{N}+1] \qquad P_3 = P[X \in 2\mathbb{N}^*].$$

**Exercice 3** Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge. On tire une boule de l'urne. On s'arrête si la boule tirée est la boule rouge; on remet la boule tirée dans l'urne si elle n'est pas rouge, et on recommence l'expérience. Soit $N$ le nombre de tirages effectués lorsque la boule rouge apparait pour la première fois.

a) Quelle est la loi de probabilité de $N$?

b) Calculer la plus petite valeur de l'entier $n$ tel que $P[N \leq n] \geq 0,9$.

**Exercice 4** On lance 10 fois de suite un dé parfait.

1. On appelle $X$ le nombre de fois qu'on a obtenu une face portant un numéro pair. Quelle est la loi de $X$? Déterminer son espérance.
2. On appelle $Y$ la somme de tous les points obtenus. Trouver l'espérance de $Y$.
3. On appelle $Z$ le nombre de faces différentes qui sont apparues. Calculer la moyenne de $Z$.
   Dans le cas où on lance le dé 3 fois (au lieu de 10), écrire explicitement la loi de probabilité de $Z$, et retrouver directement la valeur de $E(Z)$.

**Exercice 5** On considère le jeu de hasard suivant: un joueur parie $k$ francs sur un numéro de 1 à 6. On lance ensuite 3 dés équilibrés; si le numéro parié ne sort pas, le joueur perd sa mise. Sinon, on lui rend sa mise augmentée de sa mise multipliée par le nombre de fois que son numéro est apparu. Ce jeu est-il équitable?

# Variables aléatoires continues

**Exercice 6** Déterminer $C$ pour que la fonction $x \longrightarrow C(1+x)1_{[|x|\leq 1]}$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$.

a) Calculer la moyenne, la variance et la fonction de répartition de $X$.

b) Calculer la probabilité $P[-2 < X < 0]$.

**Exercice 7** On considère la fonction $f$ définie pour tout $x \in \mathcal{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} C(x^2 - x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel $C$ pour que la fonction $f$ soit une densité de probabilité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire absolument continue de densité $f$. Calculer la moyenne, la variance et la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.
3. Résoudre les équations: a) $F_X(t) = \frac{3}{2}$, b) $F_X(t) = \frac{t}{2}$.

**Exercice 8** Soit la fonction $F$ définie sur $\mathcal{R}$ par:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq x_0 \\ 1 - \frac{x_0^2}{x^2} & \text{si} \quad x > x_0 \end{cases}$$

où $x_0$ est un nombre réel fixé, strictement positif.

1. Montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ admettant une densité de probabilité qu'on précisera.
2. Calculer la moyenne de la variable aléatoire $X$.
3. Calculer la probabilité $P[|X - E(X)| \leq E(X)]$.
4. Que peut-on dire de $E(X^2)$ et donc de $V(X)$?

**Exercice 9** Vérifier que, pour tout réel $\alpha$ dans $[-1, +1]$, la fonction $f$ définie par:

$$f(x) = \frac{1 + \alpha x}{2} 1_{[-1,+1]}(x)$$

peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle $X$.
Calculer l'espérance associée, puis les probabilités $P[X \geq 0]$ et $P[|X| \leq \alpha]$.

**Exercice 10** On suppose que la durée d'une conversation téléphonique suit une loi exponentielle.

1. Soit $0 < a < b$. Montrer que $P[T < b | T > a] = P[T < b - a]$.
2. On suppose que la durée moyenne d'une conversation téléphonique est de dix minutes.
   En arrivant devant trois cabines téléphoniques, on constate qu'elles sont toutes les trois occupées.
   Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'elles se libère avant cinq minutes?

**Exercice 11**
Soit X une variable aléatoire réelle distribuée suivant une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

(a) On suppose que $m = -1$, $\sigma = 2$. Calculer les probabilités :

$$P[-1 < X < 1] \quad , \quad P[2 < X < 3] \quad , \quad P[X < -2] \quad , \quad P[X < 0] \quad , \quad P[X > 4].$$

(b) On suppose que $P[X < 0] = 0,6$ et $P[X > 2] = 0,25$. Calculer $m$ et $\sigma$.

**Exercice 12 à faire sans calcul**

1. Montrer que pour une valeur de la constante C que l'on déterminera, la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = Ce^{-(x^2-4x)}$$

   est la densité de probabilité d'une loi usuelle que l'on précisera.

2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant la densité de probabilité $f$. Calculer la moyenne et la variance de X.

3. En utilisant ce qui précède, calculer les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-(x^2-4x)}dx \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-(x^2-4x)}dx$$

**Exercice 13** Soit $X$ une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale $N(0,1)$.

1. - Trouver la loi de $Y = X^2$.
   - En déduire la valeur de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx$.
   - Retrouver ce résultat par un changement de variables.

2. Calculer $E(Y)$, et plus généralement, calculer $E(X^n)$.

**Exercice 14**
Soit X une variable aléatoire ayant une densité constante (non-nulle) sur l'intervalle $I = ]0,1[$ et nulle ailleurs — on dira que X suit la loi uniforme sur I.

1. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \ln \frac{1}{X}$, puis sa densité
2. Même question avec $Z = e^X$
3. Trouver la loi de $T = \ln(\exp(Y) - 1)$, où Y suit la loi trouvée au 1