Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2013-2014
MA 0804 - Master 1

TD4

Fonctions caractéristiques

Exercice 1
Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, sont–elles des fonctions caractéristiques ?
Dans l'affirmative, préciser la loi de probabilité associée.

1) $\varphi(t) = 1$
2) $\varphi(t) = 2$
3) $\varphi(t) = e^{iat}$
4) $\varphi(t) = \cos(at)$
5) $\varphi(t) = \sin(at)$
6) $\begin{cases} \varphi(t) = 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$

Le cas échéant, a est un réel quelconque.

Exercice 2

1. Soit X une variable aléatoire réelle, admettant une densité f. Montrer que f paire équivaut au fait que la fonction caractéristique de X est réelle.
2. Montrer que si une fonction caractéristique φ est réelle, alors φ est paire.
3. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, et dont la fonction caractéristique est à valeurs réelles. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.

Exercice 3
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété :

$$\mathbb{P}[X = n+1] = \frac{1}{3}\mathbb{P}[X = n]$$

Quelle est la fonction caractéristique de X ?

Exercice 4
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées suivant les lois binomiales $b(n, \frac{1}{2})$ et $b(n, \frac{1}{3})$ respectivement.
La somme $X + Y$ est–elle distribuée suivant une loi binomiale ?
Justifier votre réponse de deux manières differentes.

Exercice 5

1. Montrer que la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = \exp(-2|t|)\cos(2t)$$

   est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X.
   Indication: Considérer deux variables aléatoires réelles indépendantes X_1 et X_2, telles que X_1 suive une loi de Cauchy et $\mathbb{P}[X_2 = 1] = \mathbb{P}[X_2 = -1] = \frac{1}{2}$.
2. En déduire la fonction de répartition de X, puis donner une forme explicite de la densité de X.
3. Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-2|t|}\cos(2t)dt$?

Exercice 6
Calculer les moments $\mathbb{E}(X^n)$ d'une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:

1. par un calcul direct et une récurrence ;
2. en utilisant les dérivées successives de la fonction caractéristique.

Exercice 7
Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$, et $Y = X - m$ où $m = \mathbb{E}(X)$ désigne la moyenne de X.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_Y de la variable aléatoire Y.
2. Calculer directement les moyennes $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$.
3. Plus généralement, en utilisant les dérivées successives de φ_Y, calculer les moments d'ordre k de Y : $\mathbb{E}(Y^k)$, appelés aussi moments centrés d'ordre k de X, et ceci pour tout k entier positif ou nul.

Exercice 8
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(]-1,0[)$. On pose $Y = \sup\,(X, -X-1)$.

1. Calculer la fonction caractéristique de Y, puis préciser la loi de cette variable aléatoire.
2. Montrer sans utiliser le 1. que $\mathbb{P}[-\frac{1}{2} \leq Y \leq 0] = 1$.
3. Chercher la densité de Y directement, c'est–à–dire sans utiliser le 1.