

Théorèmes limites et tests statistiques

Exercice 1 On jette n fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Trouver des valeurs de n telles que la fréquence d'apparition du côté face soit $1/2$ à $1/100$ près, avec une probabilité supérieure ou égale à $0,9$.

Exercice 2 Une urne contient des boules de couleurs différentes, dont une proportion (inconnue) p de blanches. On effectue n tirages avec remise et l'on note S la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. Quelles sont la loi, l'espérance et la variance de S ?
2. On suppose que $n = 1000$ et que l'on a tiré 455 fois une boule blanche. Déterminer un intervalle de confiance (à 98 pour cent) pour p , en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.
3. Même question, en utilisant le théorème de De Moivre-Laplace (ou Th central-limite ou approximation normale).

Exercice 3 Un âne, placé entre un seau d'eau et un boisseau d'avoine, boit avec une probabilité p inconnue. On met 700 ânes dans cette situation, 224 boivent. On suppose les expériences indépendantes. Calculer un intervalle de confiance à 99 pour cent pour p , de deux manières différentes.

Exercice 4 Monsieur S. pousse un rocher tout en haut d'une montagne. Pendant qu'il se repose, le rocher roule en bas par le versant nord de la montagne avec une probabilité (inconnue) p . Sinon le rocher emprunte le versant sud. Lorsque Monsieur U. vient lui rendre visite, Monsieur S. a déjà poussé 10000 son rocher et il est retombé 57142 fois au nord. Calculer un intervalle de confiance à 95 pour cent pour p de deux manières différentes.

Exercice 5 Une personne P répète une expérience E 625 fois, dans des conditions qui rendent toutes les expériences indépendantes. Cette personne obtient 225 fois le résultat R. Notons p la probabilité (inconnue) d'obtenir R. Calculer un intervalle de confiance à 97 pour cent pour p , de deux façons différentes.

Exercice 6 On sait qu'un parti politique recueille en général un pourcentage p des voix compris entre 20 et 30 aux élections législatives. Quel est le nombre n de personnes à interroger lors d'un sondage pour estimer p avec une précision supérieure à 3% et une probabilité d'erreur inférieure à 10% ?

1. En utilisant l'inégalité de Tchebychev.
2. En utilisant le TCL.